Lógica Curso 2015-16 Deducción natural en LPO

Ejercicios resueltos - Enunciados

1. Demostrar la siguiente deducción con el cálculo de deducción natural, justificando cada paso adecuadamente:

   $T\ [\ \forall x \exists y\ r(x,f(y)) \lor \neg \exists z\ p(z)\ ,\ \exists x \forall z\ (r(x,f(z)) \rightarrow q(z))\ ]\ \vdash\ p(b) \rightarrow \exists x\ q(x)$ (*)

2. Demostrar la corrección de la siguiente estructura deductiva mediante deducción natural:

   $\{\ \exists x \forall y (P(y) \rightarrow Q(x))\ \} \vdash \exists y P(y) \rightarrow \exists x Q(x)$

3. Demostrar mediante deducción natural la corrección del siguiente argumento (se pueden usar las reglas derivadas):

   $T\ [\ \neg \forall x\ P(x,x)\ ]\ \vdash\ \exists y\ (P(a,y) \rightarrow \forall x\ P(x,x)) \rightarrow \exists y\ \neg P(a,y)\ )$ (*)

4. Demostrar la fórmula $\exists x\ (q(x) \rightarrow p(f(a),x)\ )$ a partir del conjunto de premisas

   $\{\ \forall x\ (\neg\ q(x) \lor r(x)\ )\ ,\ \forall x\ \exists z\ (\ \neg\ p(x,z) \rightarrow \neg\ r(z)\ )\ \})$ (*)

5. Demostrar la corrección de las siguientes estructuras deductivas mediante deducción natural:

   $T[\neg \forall x(P(x) \land Q(x))] \vdash \exists x \neg P(x) \lor \exists y \neg Q(y)$

6. Demuestre en Cálculo de Deducción Natural las siguientes estructuras argumentales:

   $T\ [\ \forall x\ (P(x) \rightarrow (Q(x) \land \neg R(a,x)))\ ,\ \forall x\ \forall y\ (R(y,x) \lor H(x))\ ]\ \vdash\ \forall x\ (P(x) \rightarrow H(x))\ )$ (*)

7. Demostrar mediante deducción natural la corrección de la siguiente deducción:

$$T\ [\ \forall x\ (P(x) \rightarrow (S(x) \vee G(x)))\ ,\ \neg G(a)\ ]\ \vdash\ \exists x\ (\neg S(x) \rightarrow \neg P(x))$$

8. Demuestre en Cálculo de Deducción Natural la siguiente estructura argumental:

$$T\ [\ \forall x\ (\ F(x) \rightarrow (G(x) \wedge \neg H(x))\ )\ ,\ \forall x\ (\ K(x) \rightarrow H(x)\ )\ ]\ \vdash\ \forall x\ (\ F(x) \rightarrow (G(x) \wedge \neg\ K(x))\ )$$

(*) ejercicios propuestos en alguna evaluación.

Demostrar la siguiente deducción con el cálculo de deducción natural, justificando cada paso adecuadamente:

$$T\ [\ \forall x \exists y\ r(x,f(y)) \vee \neg \exists z\ p(z)\ ,\ \exists x \forall z\ (r(x,f(z)) \rightarrow q(z))\ ]\ \vdash\ p(b) \rightarrow \exists x\ q(x)$$

1.	$\forall x \exists y\ r(x,f(y)) \vee \neg \exists z\ p(z)$	premisa	
2.	$\exists x \forall z\ (r(x,f(z)) \rightarrow q(z))$	premisa	
3.	│ $p(b)$	supuesto	
4.	│ $\exists z\ q(z)$ es p(z)	int $\exists$ 3	
5.	│ $\forall x \exists y\ r(x,f(y))$	corte 1,4	
6.	│ $\forall z\ (r(a,f(z)) \rightarrow q(z))$	elim $\exists$ 2	a constante temporal
7.	│ $\exists y\ r(a,f(y))$	elim $\forall$ 5	
8.	│ $r(a,f(b))$	elim $\exists$ 7	b constante temporal
9.	│ $r(a,f(b)) \rightarrow q(b)$	elim $\forall$ 6	
10.	│ $q(b)$	modus ponens 8, 9	
11.	│ $\exists x\ q(x)$	int $\exists$ 10	
12.	$p(b) \rightarrow \exists x\ q(x)$	int $\rightarrow$ 3, 11	

Demostrar la corrección de la siguiente estructura deductiva mediante deducción natural:

$\{\exists x \forall y(P(y) \rightarrow Q(x))\} \vdash \exists y P(y) \rightarrow \exists x Q(x)$

$\{\exists x \forall y(P(y) \rightarrow Q(x))\} \vdash \exists y P(y) \rightarrow \exists x Q(x)$

1: $\exists x \forall y(P(y) \rightarrow Q(x))$	premisa
2: $\exists y P(y)$	supuesto
3: $P(a^*)$	$E_{\exists 2}$
4: $\forall y(P(y) \rightarrow Q(a^*))$	$E_{\forall 1}$
5: $P(a^*) \rightarrow Q(a^*)$	$E_{\forall 4}$
6: $Q(a^*)$	$E_{\rightarrow 5}$
7: $\exists x Q(x)$	$I_{\exists 6}$
8: $\exists y P(y) \rightarrow \exists x Q(x)$	$I_{\rightarrow 2,7}$

Demostrar mediante deducción natural la corrección del siguiente argumento (se pueden usar las reglas derivadas):

$$T\ [\ \neg\forall x\ P(x,x)\ ]\ \vdash\ \exists y\ (P(a,y) \rightarrow \forall x\ P(x,x)) \rightarrow \exists y\ \neg P(a,y)$$

1.	$\neg\forall x\ P(x,x)$	premisa
2.	$\quad\vert\ \exists y\ (P(a,y) \rightarrow \forall x\ P(x,x)$	supuesto
3.	$\quad\vert\ P(a,b) \rightarrow \forall x\ P(x,x)$	elim ∃ 2 ('b' constante nueva)
4.	$\quad\vert\ \neg P(a,b) \vee \forall x\ P(x,x)$	def → 3
5.	$\quad\vert\ \neg P(a,b)$	corte 1, 4
6.	$\quad\vert\ \exists y\ \neg P(a,y)$	int ∃ 5
7.	$\exists y\ (P(a,y) \rightarrow \forall x\ P(x,x)) \rightarrow \exists y\ \neg P(a,y)$	int → 2, 6

Demostrar la fórmula $\exists x\,(q(x) \rightarrow p(f(a),x))$ a partir del conjunto de premisas

$\{\ \forall x\,(\neg q(x) \vee r(x))\ ,\ \ \forall x\,\exists z\,(\neg p(x,z) \rightarrow \neg r(z))\ \}$

1.	$\forall x\,\exists z\,(\neg p(x,z) \rightarrow \neg r(z))$	premisa	
2.	$\exists z\,(\neg p(f(a),z) \rightarrow \neg r(z))$	elim $\forall$ 1	(*)
3.	$\neg p(f(a),c) \rightarrow \neg r(c)$	elim $\exists$ 2	
4.	$\quad q(c)$	supuesto	
5.	$\quad \forall x\,(\neg q(x) \vee r(x))$	premisa	
6.	$\quad \neg q(c) \vee r(c)$	elim $\forall$ 5	
7.	$\quad r(c)$	corte 4,6	
8.	$\quad \neg\neg p(f(a),c)$	modus tollens 3,7	
9.	$\quad p(f(a),c)$	elim $\neg$ 8	
10.	$q(c) \rightarrow p(f(a),c)$	intr $\rightarrow$ 4,9	
11.	$\exists x\,(q(x) \rightarrow p(f(a),x))$	intr $\exists$ 10	

(*) puesto que en la fórmula que hay que demostrar aparece $p(f(a),x)$

Demostrar la corrección de la estructura deductiva siguiente, mediante deducción natural:

$$T\,[\,\neg \forall x\,(P(x) \wedge Q(x))\,] \vdash \exists x\, \neg P(x) \vee \exists y\, \neg Q(y)$$

1ª solución:

1.	$\neg \forall x\,(P(x) \wedge Q(x))$	premisa
2.	$\exists x\, \neg (P(x) \wedge Q(x))$	$\neg \forall x\, A(x) \equiv \exists x\, \neg A(x)$
3.	$\exists x\,(\neg P(x) \vee \neg Q(x))$	De Morgan 2
4.	$\neg P(a) \vee \neg Q(a)$	elim $\exists$ 3, a constante nueva
5.	$\neg P(a)$	supuesto
6.	$\exists x\, \neg P(x)$	int $\exists$ 5
7.	$\exists x\, \neg P(x) \vee \exists y\, \neg Q(y)$	int $\vee$ 6
8.	$\neg Q(a)$	supuesto
9.	$\exists y\, \neg Q(y)$	int $\exists$ 8
10.	$\exists x\, \neg P(x) \vee \exists y\, \neg Q(y)$	int $\vee$ 9
11.	$\exists x\, \neg P(x) \vee \exists y\, \neg Q(y)$	elim $\vee$ 4, 5-7, 8-10

2ª solución: por contradicción:

1.	$\neg \forall x\,(P(x) \wedge Q(x))$	premisa
2.	$\neg(\exists x\, \neg P(x) \vee \exists y\, \neg Q(y))$	supuesto
3.	$\neg \exists x\, \neg P(x) \wedge \neg \exists y\, \neg Q(y)$	De Morgan 2
4.	$\forall x \neg\neg P(x) \wedge \forall y \neg\neg Q(y)$	$\neg \exists x\, A(x) \equiv \forall x\, \neg A(x)$
5.	$\forall x\, P(x) \wedge \forall y\, Q(y)$	elim $\neg$ 4, dos veces
6.	$\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$	$\forall y\, Q(y) \equiv \forall x\, Q(x)$
7.	$\forall x\,(P(x) \wedge Q(x))$	$\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \equiv \forall x\,(P(x) \wedge Q(x))$
8.	$\neg \forall x\,(P(x) \wedge Q(x))$	iteración 1
9.	$\neg\neg(\exists x\, \neg P(x) \vee \exists y\, \neg Q(y))$	int $\neg$ 2, 7, 8
10.	$\exists x\, \neg P(x) \vee \exists y\, \neg Q(y)$	elim $\neg$ 9

Demuestre en Cálculo de Deducción Natural la siguiente estructura argumental:

T [$\forall x\, (P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge \neg R(a,x)))$, $\forall x\, \forall y\, (R(y,x) \vee H(x))$] $\vdash$ $\forall x\, (P(x) \rightarrow H(x))$

1.	$\forall x\, (P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge \neg R(a,x)))$	premisa
2.	$\forall x\, \forall y\, (R(y,x) \vee H(x))$	premisa
3.	$P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge \neg R(a,x))$	elim $\forall$ 1
4.	$\forall y\, (R(y,x) \vee H(x))$	elim $\forall$ 2
5.	$R(a,x) \vee H(x)$	elim $\forall$ 4
6.	$\quad$ | $P(x)$	supuesto
7.	$\quad$ | $Q(x) \wedge \neg R(a,x)$	corte 3, 6
8.	$\quad$ | $\neg R(a,x)$	elim $\wedge$ 7
9.	$\quad$ | $H(x)$	corte 5, 8
10.	$P(x) \rightarrow H(x)$	int $\rightarrow$ 6, 9
11.	$\forall x\, (P(x) \rightarrow H(x))$	int $\forall$ 10

Demostrar mediante deducción natural la corrección de la siguiente deducción:

$T\ [\ \forall x\ (P(x) \rightarrow (S(x) \vee G(x)))\ ,\ \neg G(a)\ ]\ \vdash\ \exists x\ (\neg S(x) \rightarrow \neg P(x))$

1.	$\forall x\ (P(x) \rightarrow (S(x) \vee G(x)))$	premisa
2.	$\neg G(a)$	premisa
3.	$P(a) \rightarrow (S(a) \vee G(a))$	elim ∀ 1
4.	$\quad \neg S(a)$	supuesto
5.	$\quad \neg S(a) \wedge \neg G(a)$	int ∧ 4, 2
6.	$\quad \neg (S(a) \vee G(a))$	de Morgan 5
7.	$\quad \neg P(a)$	Modus Tollens 3, 6
8.	$\neg S(a) \rightarrow \neg P(a)$	int → 4, 7
9.	$\exists x\ (\neg S(x) \rightarrow \neg P(x))$	int ∃ 8

Demuestre en Cálculo de Deducción Natural la siguiente estructura argumental:

$T\ [\ \forall x\ (\ F(x) \rightarrow (G(x) \wedge \neg H(x))\ )\ ,\ \forall x\ (\ K(x) \rightarrow H(x)\ )\ ]\ \vdash\ \forall x\ (\ F(x) \rightarrow (G(x) \wedge \neg K(x))\ )$

1.	$\forall x\ (\ F(x) \rightarrow (G(x) \wedge \neg H(x))\ )$	premisa
2.	$\forall x\ (\ K(x) \rightarrow H(x)\ )$	premisa
3.	$\quad F(x)$	supuesto
4.	$\quad F(x) \rightarrow (G(x) \wedge \neg H(x))$	elim $\forall$ 1
5.	$\quad G(x) \wedge \neg H(x)$	elim $\rightarrow$ 3, 4
6.	$\quad G(x)$	elim $\wedge$ 5
7.	$\quad \neg H(x)$	elim $\wedge$ 5
8.	$\quad K(x) \rightarrow H(x)$	elim $\forall$ 2
9.	$\quad \neg K(x)$	modus tollens 7, 8
10.	$\quad G(x) \wedge \neg K(x)$	int $\wedge$ 6, 9
11.	$F(x) \rightarrow (G(x) \wedge \neg K(x))$	int $\rightarrow$ 3 – 10
12.	$\forall x\ (\ F(x) \rightarrow (G(x) \wedge \neg K(x))\ )$	int $\forall$ 11