Lógica   Curso 2015-16   Resolución con unificación en LPO

Ejercicios resueltos - Enunciados

1. Demostrar que el siguiente conjunto de cláusulas es insatisfacible mediante resolución con umg, indicando en cada paso el unificador empleado:

C_1: ¬P(y) ∨ Q(z, h(z))

C_2: S(z, f(x), x) ∨ ¬P(x)

C_3: P(a)

C_4: ¬R(x, h(y)) ∨ ¬S(g(z), z, a)

C_5: ¬T(g(x)) ∨ ¬R(x, h(x))

C_6: R(x, y) ∨ ¬Q(z, y)

2. Demostrar usando el Método de Resolución con UMG que la fórmula ∀x∃yp(x,y) se deduce del siguiente conjunto de cláusulas:

A1: r(x,x) ∨ r(x,a) ∨ ¬s(x,y)

A2: r(x,x) ∨ r(z,f(y)) ∨ s(x,z)

A3: q(f(z))

A4: p(x,z) ∨ ¬s(b,z)

A5: ¬q(f(x)) ∨ ¬r(x,b)

A6: ¬r(f(y),y)

3. Demostrar que el siguiente conjunto de cláusulas es insatisfacible mediante el método de resolución con umg:

C_1: S(h(z)) ∨ R(y)

C_2: Q(y) ∨ ¬P(y, h(y)) ∨ S(y)

C_3: ¬P(z, x) ∨ ¬P(f(f(x)), z)

C_4: ¬S(x)

C_5: S(x) ∨ Q(f(x)) ∨ ¬R(h(x))

C_6: P(f(x), x) ∨ ¬Q(f(x))

4. Dado el conjunto de cláusulas:

C1: $\neg B(x) \vee M(x)$	C5: $A(f(x),x)$
C2: $\neg M(x) \vee E(b,x) \vee A(b,x)$	C6: $D(a,b)$
C3: $\neg M(x) \vee \neg A(x,x)$	C7: $B(a)$
C4: $\neg D(x,y) \vee \neg A(y,x)$	C8: $\neg E(b,a)$

Demostrar que dicho conjunto es insatisfacible mediante resolución con UMG, indicando en cada paso el unificador empleado.

5. Dado el siguiente conjunto de cláusulas:

C1: $\neg t(y)$

C2: $p(x) \vee t(x) \vee \neg r(x; g(x))$

C3: $r(h(z); z) \vee \neg p(h(z))$

C4: $t(y) \vee \neg q(g(y)) \vee p(y)$

C5: $\neg r(x; y)$

C6: $q(x) \vee t(x)$

a) probar que es insatisfacible por resolución input lineal con umg.

b) elegir {C2,C3,C4,C5,C6} como conjunto soporte, ¿garantiza que existe una resolución dirigida? Decir por qué.

6. Demostrar la insatisfacibilidad del siguiente conjunto de cláusulas mediante resolución dirigida, con conjunto objetivo {C0}, indicando el UMG en cada paso.

C1: $A(x) \vee \neg B(x)$

C2: $C(x, x) \vee \neg D(x)$

C3: $D(f(a))$

C4: $B(y) \vee \neg A(y)$

C5: $A(y) \vee \neg D(x) \vee \neg C(y, x)$

C0: $\neg A(y) \vee \neg B(y) \vee \neg D(x) \vee \neg C(y, x)$

7. Dado el siguiente conjunto de cláusulas:

$C1 : \neg P(x) \vee Q(x) \vee \neg R(x, y)$

$C2 : \neg D(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg R(x, y)$

$C3 : \neg D(x) \vee P(x)$

$C4 : D(f(x))$

$C5 : D(a)$

$C6 : R(x, f(x))$

(a) Demostrar que es insatisfacible usando resolución.
(b) La refutación que se ha obtenido ¿es lineal? ¿es input? (c) ¿Qué condición la haría dirigida? Justificar las respuestas.

8. Dado el conjunto de cláusulas:

$C1: A(x) \vee \neg B(g(x)) \vee C(x)$	$C4: C(x) \vee \neg D(x,y)$
$C2: \neg C(x)$	$C5: B(x) \vee C(x)$
$C3: A(x) \vee C(x) \vee \neg D(x,g(x))$	$C6: \neg A(f(x)) \vee D(f(x),x)$

a) Demostrar que dicho conjunto es insatisfacible mediante resolución con UMG, indicando en cada paso el unificador empleado.
b) La refutación obtenida ¿es lineal?, ¿es input?. Justificar la respuesta.
c) Definir un conjunto soporte, con más de una cláusula, para que la refutación anterior sea dirigida. Justificar la respuesta.
d) El conjunto soporte anterior, ¿cumple la condición de completud?, ¿por qué?

Demostrar que el siguiente conjunto de cláusulas es insatisfacible mediante resolución con umg, indicando en cada paso el unificador empleado:

C_1: $\neg P(y) \vee Q(z, h(z))$

C_2: $S(z, f(x), x) \vee \neg P(x)$

C_3: $P(a)$

C_4: $\neg R(x, h(y)) \vee \neg S(g(z), z, a)$

C_5: $\neg T(g(x)) \vee \neg R(x, h(x))$

C_6: $R(x, y) \vee \neg Q(z, y)$

Renombramos las variables de las clausulas:

C_1: $\neg P(x_1) \vee Q(y_1, h(y_1))$

C_2: $S(u_1, f(x_2), x_2) \vee \neg P(x_2)$

C_3: $P(a)$

C_4: $\neg R(x_3, h(y_2)) \vee \neg S(g(z_1), z_1, a)$

C_5: $\neg T(g(x_4)) \vee \neg R(x_4, h(x_4))$

C_6: $R(y_3, z_2) \vee \neg Q(x_5, z_2)$

Podemos eliminar la cláusula 5 ya que el predicado T no aparece en ninguna otra cláusula.

Una posible derivación que nos permite llegar a la cláusula vacía es la siguiente:

R_1: $Q(y_1, h(y_1))$	C_1 con C_3:	$\{x_1/ a\}$
R_2: $R(y_3, h(x_5))$	R_1 con C_6:	$\{ y_1/ x_5, z_2/ h(x_5)\}$
R_3: $\neg S(g(z_1), z_1, a)$	R_2 con C_4:	$\{ y_3/ x_3, y_2/ x_5\}$
R_4: $\neg P(a)$	R_3 con C_2:	$\{ u_1/ g(f(a)) , z_1/ f(a), x_2/ a\}$
R_5: $\square$	R_4 con C_3:	

En forma de árbol:

C_1: $\neg P(x_1) \lor Q(y_1, h(y_1))$ $\qquad$ C_3: $P(a)$

$\{ x_1 / a \}$

R_1: $Q(y_1, h(y_1))$ $\qquad$ C_6: $R(y_3, z_2) \lor \neg Q(x_5, z_2)$

$\{ y_1 / x_5,\ z_2 / h(x_5) \}$

R_2: $R(y_3, h(x_5))$ $\qquad$ C_4: $\neg R(x_3, h(y_2)) \lor \neg S(g(z_1), z_1, a)$

$\{ y_3 / x_3,\ y_2 / x_5 \}$

R_3: $\neg S(g(z_1), z_1, a)$ $\qquad$ C_2: $S(u_1, f(x_2), x_2) \lor \neg P(x_2)$

$\{ u_1 / g(f(a)),\ z_1 / f(a),\ x_2 / a \}$

C_3: $P(a)$ $\qquad$ R_4: $\neg P(a)$

R_5: $\square$

La resolución obtenida sigue una estrategia lineal. Además es una estrategia input y también es dirigida.

Demostrar usando el Método de **Resolución con UMG** que la fórmula $\forall x \exists y p(x,y)$
se deduce del siguiente conjunto de cláusulas:

A1: r(x,x) ∨ r(x,a) ∨ ¬s(x,y)
A2: r(x,x) ∨ r(z,f(y)) ∨ s(x,z)
A3: q(f(z))
A4: p(x,z) ∨ ¬s(b,z)
A5: ¬q(f(x)) ∨ ¬r(x,b)
A6: ¬r(f(y),y)

La forma clausular de la negación de la conclusión sólo contiene una cláusula:

A7: ¬p(c,y)

se elige la constante c para no repetir a y b que ya aparecen en las otras cláusulas.

Se renombran las variables para evitar, en la medida de lo posible, repetición de nombres.

A1: r(x1,x1) v r(x1,a) v ¬s(x1,y1)

A2: r(x2,x2) v r(z2,f(y2)) v s(x2,z2)

A3: q(f(z3))

A4: p(x4,z4) v ¬s(b,z4)

A5: ¬q(f(x5)) v ¬r(x5,b)

A6: ¬r(f(y6),y6)

A7: ¬p(c,y7)

Una posible secuencia de resolventes es:

R1:	¬r(x5,b)	(A3, A5)	{ z3/x5 }
R2:	r(z2,f(y2)) v s(b,z2)	(R1, A2)	{ x2/b, x5/b }
R3:	s(b,f(f(y2)))	(R2, A6)	{ z2/f(f(y2)), y6/f(y2) }
R4:	p(x4,f(f(y2)))	(R3, A4)	{ z4/f(f(y2)) }
R5:	□	(R4, A7)	{ x4/c, y7/f(f(y2)) }

Demostrar que el siguiente conjunto de cláusulas es insatisfacible mediante el método de resolución con umg:

C_1: $S(h(z)) \lor R(y)$

C_2: $Q(y) \lor \neg P(y, h(y)) \lor S(y)$

C_3: $\neg P(z, x) \lor \neg P(f(f(x)), z)$

C_4: $\neg S(x)$

C_5: $S(x) \lor Q(f(x)) \lor \neg R(h(x))$

C_6: $P(f(x), x) \lor \neg Q(f(x))$

$\neg S(x) \qquad S(h(z)) \lor R(y)$

$\backslash \qquad / \; \{ x/h(z) \}$

$R(y) \qquad S(x) \lor Q(f(x)) \lor \neg R(h(x))$

$\backslash \qquad / \; \{ y/h(x) \}$

$S(x) \lor Q(f(x)) \qquad \neg S(x')$

$\backslash \qquad / \; \{ x/x' \}$

$Q(f(x')) \qquad \neg Q(f(x)) \lor P(f(x), x)$

$\backslash \qquad / \; \{ x'/x \}$

$P(f(x), x) \qquad \neg P(z, x') \lor \neg P(f(f(x')), z)$

$\backslash \qquad / \; \{ x/f(x'), z/f(x') \}$

$P(f(x), x) \qquad \neg P(f(x'), x')$

$\backslash \qquad / \; \{ x/x' \}$

$\square$

Dado el conjunto de cláusulas:

C1: $\neg B(x) \vee M(x)$

C2: $\neg M(x) \vee E(b,x) \vee A(b,x)$

C3: $\neg M(x) \vee \neg A(x,x)$

C4: $\neg D(x,y) \vee \neg A(y,x)$

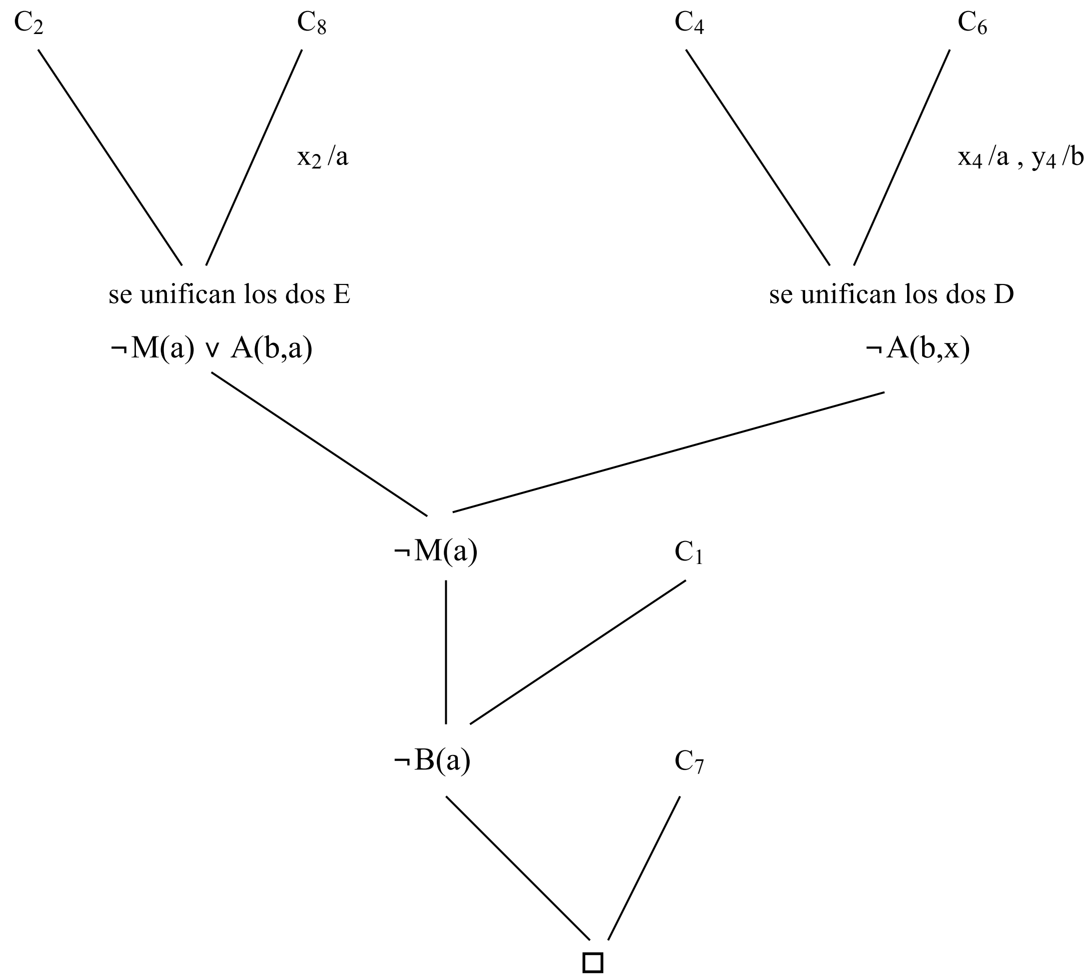
C5: $A(f(x),x)$

C6: $D(a,b)$

C7: $B(a)$

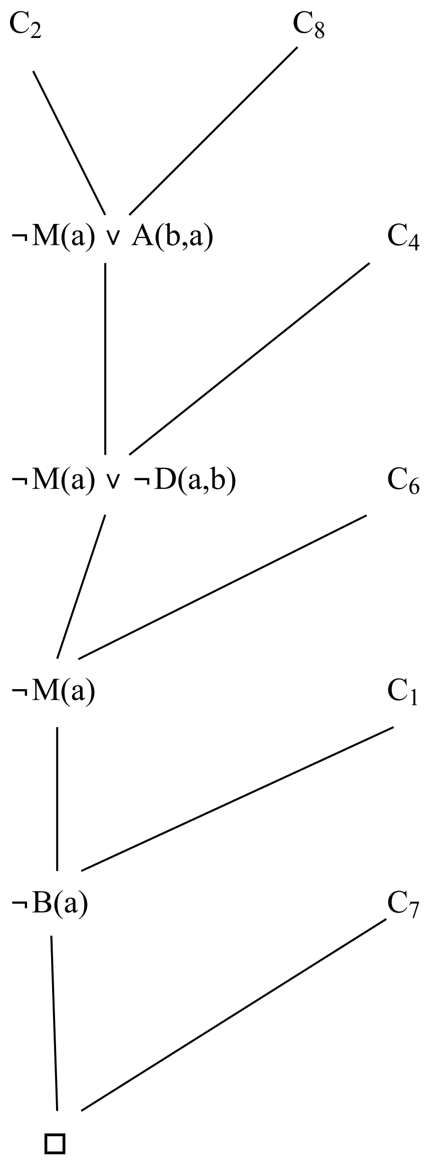
C8: $\neg E(b,a)$

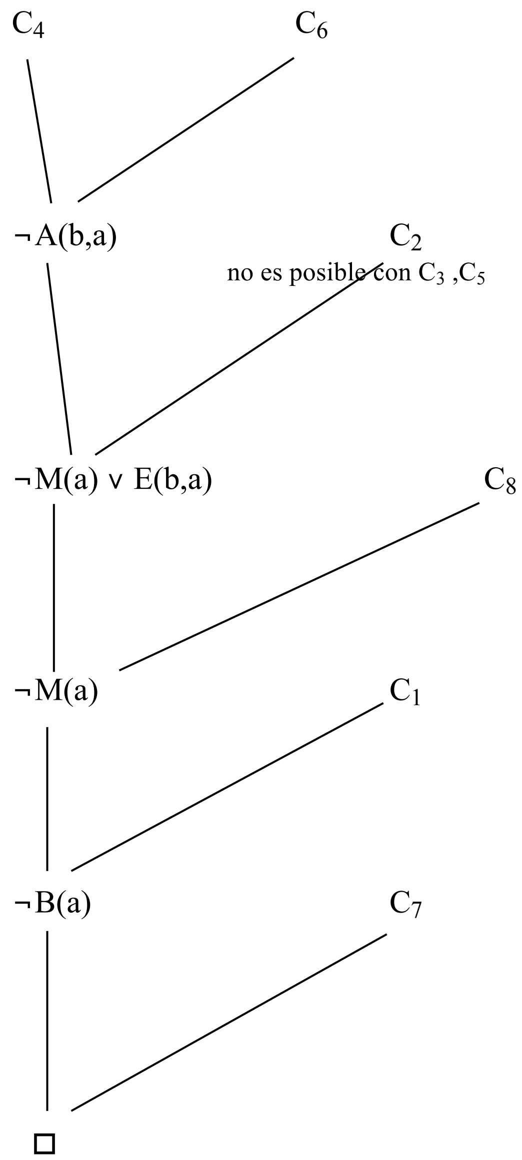
Demostrar que dicho conjunto es insatisfacible mediante resolución con UMG, indicando en cada paso el unificador empleado.



Otras soluciones con resolución lineal:

… // …


C2
C8
¬M(a) ∨ A(b,a)
C4
¬M(a) ∨ ¬D(a,b)
C6
¬M(a)
C1
¬B(a)
C7
□


C4
C6
¬A(b,a)
C2
no es posible con C3 ,C5
¬M(a) ∨ E(b,a)
C8
¬M(a)
C1
¬B(a)
C7
□

Dado el siguiente conjunto de cláusulas:

C_1: $\neg$ t(y)

C_2: p(x) $\vee$ t(x) $\vee$ $\neg$ r(x, g(x))

C_3: r(h(z), z) $\vee$ $\neg$ p(h(z))

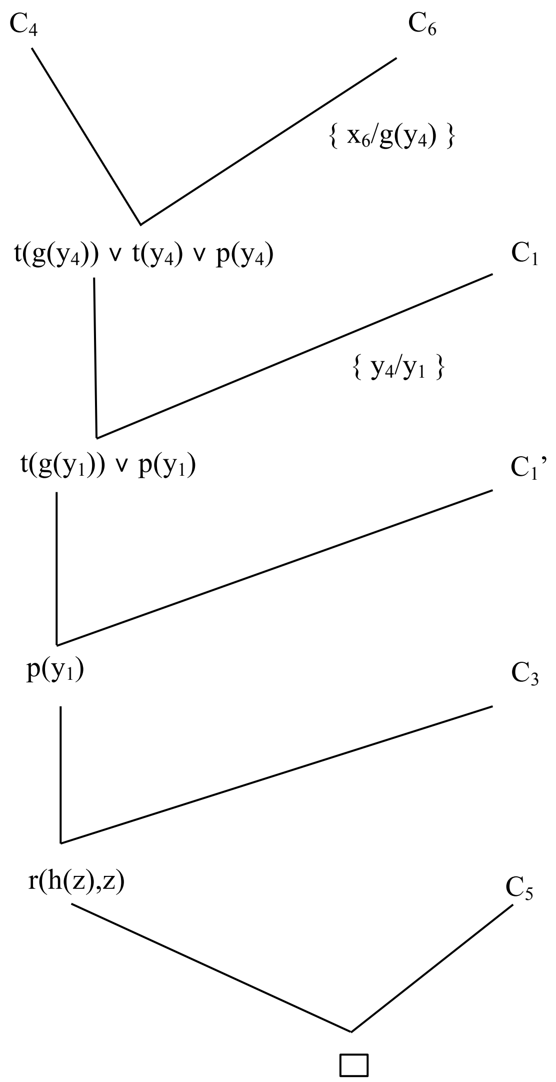
C_4: t(y) $\vee$ $\neg$ q(g(y)) $\vee$ p(y)

C_5: $\neg$ r(x,y)

C_6: q(x) $\vee$ t(x)

a) probar que es insatisfacible por resolución input lineal con umg.

b) elegir $\{C_2,C_3,C_4,C_5,C_6\}$ como conjunto soporte, ¿garantiza que existe una resolución dirigida? Decir por qué.



No se ha utilizado C_2.

- Es lineal
- Es input: siempre se utiliza una clausula de $\{C_1 \ldots C_6\}$

b) Sí, puesto que $\{C_2,C_3,C_4,C_5,C_6\}$ es satisfacible :

- interpretaciones que hacen verdaderas estas 5 cláusulas:

  D dominio cualquiera ,

  $t_D(x) = V$ para todo $x \in D$ $\longrightarrow$ hace V las cláusulas C_2, C_4 y C_6

  $r_D(x,y) = V$ para todo $x,y \in D$ $\longrightarrow$ hace V la cláusula C_5

  $p_D(x) = V$ para todo $x \in D$ $\longrightarrow$ hace V la cláusula C_4

  q_D cualquiera

Otra solución:

$R_1 = (C_3, C5) = \neg p(h(z))$ $x_5/h(z), y_5/z$

$R_2 = (R_1, C_4) = b(h(z)) \lor \neg q(g(h(z)))$ $y_4/h(z)$

$R_3 = (R_2, C_1) = \neg q(g(h(z)))$ $x_1/h(z)$

$R_4 = (R_3, C_6) = t(g(h(z)))$ $x_6/g(h(z))$ No se utiliza C_2

$R_5 = \square = (R_4, C_1)$

$\{C_2,C_3,C_4,C_5,C_6\}$ también es satisfacible

Otra solución dirigida:

R1 $\equiv$ (C1, C6) $\equiv q(x_6)$ y_1 / x_6

R2 $\equiv$ (R1, C4) $\equiv t(y_4) \lor p(y_4)$ $x_6 / g(y_4)$

R3 $\equiv$ (R2, C1) $\equiv p(y_4)$ y_1 / y_4

R4 $\equiv$ (R3, C3) $\equiv r(h(z_3), z_3)$ $y_4 / h(z_3)$

R5 $\equiv$ (R4, C5) $\equiv \square$

Demostrar la insatisfacibilidad del siguiente conjunto de cláusulas mediante resolución dirigida, con conjunto objetivo {C0}, indicando el UMG en cada paso.

C_1: $A(x) \lor \neg B(x)$

C_2: $C(x, x) \lor \neg D(x)$

C_3: $D(f(a))$

C_4: $B(y) \lor \neg A(y)$

C_5: $A(y) \lor \neg D(x) \lor \neg C(y, x)$

C_0: $\neg A(y) \lor \neg B(y) \lor \neg D(x) \lor \neg C(y, x)$

C_0 $\qquad$ C_1

$\{ x_1/y_0 \}$

$\neg B(y_0) \lor \neg B(y_0) \lor \neg D(x_0) \lor \neg C(y_0, x_0)$

$\neg B(y_0) \lor \neg D(x_0) \lor \neg C(y_0, x_0)$ $\qquad$ C_4

$\{ y_4/y_0 \}$

$\neg A(y_0) \lor \neg D(x_0) \lor \neg C(y_0, x_0)$ $\qquad$ C_5

$\{ y_5/y_0 \}$

$\neg D(x_5) \lor \neg C(y_0, x_5) \lor \neg D(x_0) \lor \neg C(y_0, x_0)$ $\qquad$ $\{ x_5/x_0 \}$

$\neg D(x_0) \lor \neg C(y_0, x_0) \lor \neg C(y_0, x_0)$

$\neg D(x_0) \lor \neg C(y_0, x_0)$ $\qquad$ C_2

$\{ y_0/x_2, x_0/x_2 \}$

$\neg D(x_2) \lor \neg D(x_2)$

$\neg D(x_2)$ $\qquad$ C_3

$\{ x_2/f(a) \}$

$\square$

Dado el siguiente conjunto de cláusulas:

C_1 : $\neg P(x) \vee Q(x) \vee \neg R(x, y)$

C_2 : $\neg D(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg R(x, y)$

C_3 : $\neg D(x) \vee P(x)$

C_4 : $D(f(x))$

C_5 : $D(a)$

C_6 : $R(x, f(x))$

(a) Demostrar que es insatisfacible usando resolución.

(b) La refutación que se ha obtenido ¿es lineal? ¿es input?

(c) ¿Qué condición la haría dirigida? Justificar las respuestas.

- 1er intento:

$R_1 \equiv (C_1, C_2)$ unificando átomos con el predicado Q :

$\equiv \neg P(x_1) \vee \neg R(x_1, y_1) \vee \neg D(x_2) \vee \neg R(x_2, x_1)$ $\quad y_2/x_1$

factorizando $R(x_1, y_1)$ y $R(x_2, x_1)$:

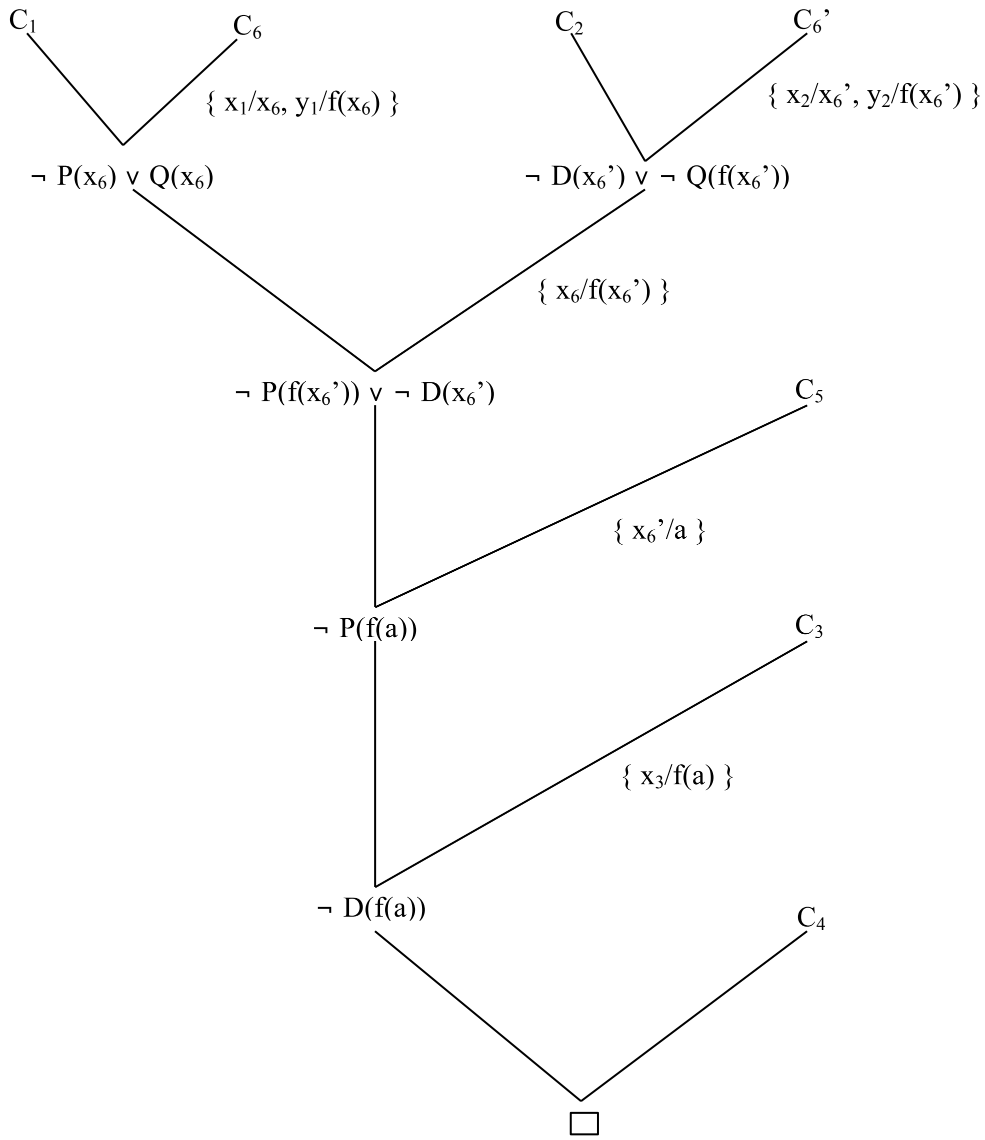
$$\begin{array}{ccccccc} R(x_1, y_1) & & R(x_2, y_1) & & & & \\ & x_1/x_2 & & & y_1/x_2 & \longrightarrow & R(x_2, x_2) \\ R(x_2, x_1) & & R(x_2, x_2) & & & & \end{array}$$

$\equiv \neg P(x_2) \vee \neg D(x_2) \vee \neg R(x_2, x_2)$

que no se puede unificar con C_6 : $R(x, f(x))$

- idea: C_1 C_6 C_2 C_6'

…/…


C_1
C_6
$\{ x_1/x_6, y_1/f(x_6) \}$
C_2
C_6'
$\{ x_2/x_6', y_2/f(x_6') \}$
$\neg P(x_6) \vee Q(x_6)$
$\neg D(x_6') \vee \neg Q(f(x_6'))$
$\{ x_6/f(x_6') \}$
$\neg P(f(x_6')) \vee \neg D(x_6')$
C_5
$\{ x_6'/a \}$
$\neg P(f(a))$
C_3
$\{ x_3/f(a) \}$
$\neg D(f(a))$
C_4
$\Box$

Dado el conjunto de cláusulas:

C_1: A(x) ∨ ¬B(g(x)) ∨ C(x) $\qquad$ C_4: C(x) ∨ ¬D(x,y)

C_2: ¬C(x) $\qquad$ C_5: B(x) ∨ C(x)

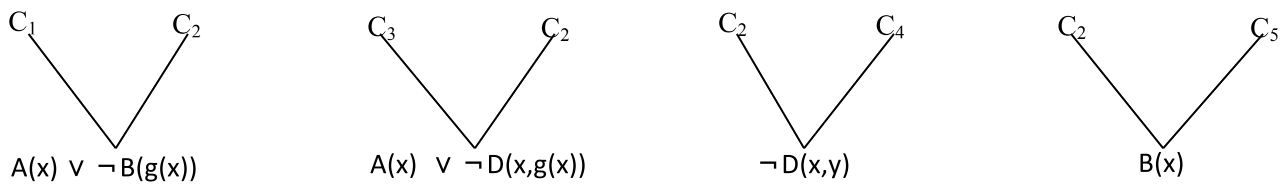
C_3: A(x) ∨ C(x) ∨ ¬D(x,g(x)) $\qquad$ C_6: ¬A(f(x)) ∨ D(f(x),x)

a) Demostrar que dicho conjunto es insatisfacible mediante resolución con UMG, indicando en cada paso el unificador empleado.
b) La refutación obtenida ¿es lineal?, ¿es input?. Justificar la respuesta.
c) Definir un conjunto soporte, con más de una cláusula, para que la refutación anterior sea dirigida. Justificar la respuesta.

El conjunto soporte anterior, ¿cumple la condición de completud?, ¿por qué?.

---

*) Se quita C(x) de todas las clausulas, utilizando C_2 :



*) ¬D(x,g(x)) y D(f(x),x) no son unificables:

D(x_1, g(x_1)) $\qquad$ { x_1/f(x_2)} $\qquad$ D(f(x_2), g(f(x_2)))

D(f(x_2),x_2) $\qquad\qquad\qquad\qquad$ D(f(x_2), x_2)

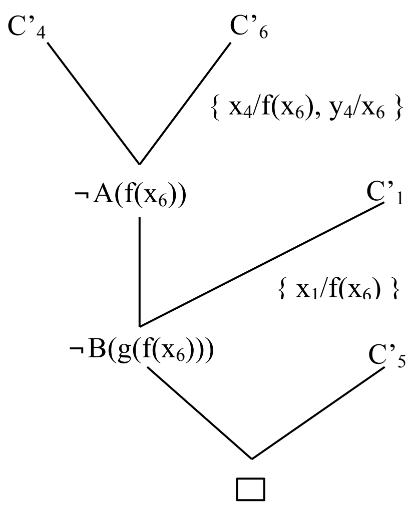
C_3 se puede eliminar pero D(f(x),x) y ¬D(x,y) sí son unificables.

*) C'$_1$: A(x) ∨ ¬B(g(x))

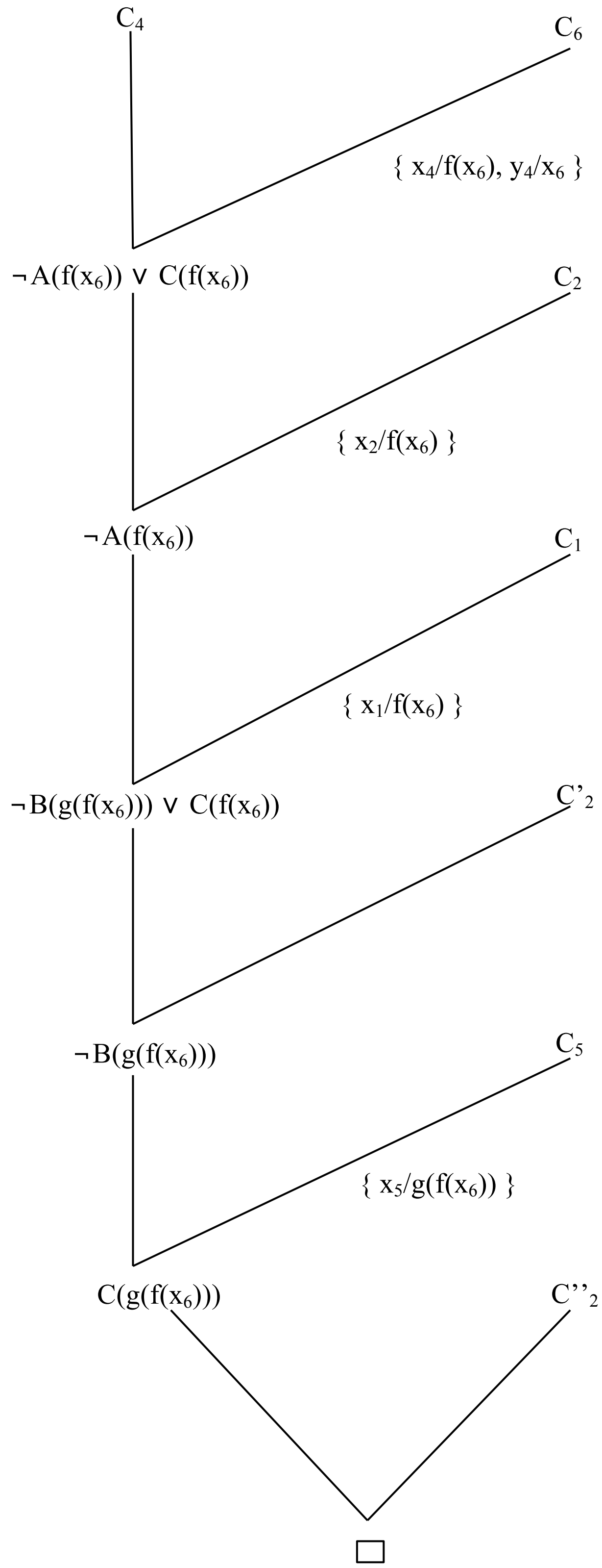
C'$_4$: ¬D(x,y)

C'$_5$: B(x)

C'$_6$: ¬A(f(x)) ∨ D(f(x),x)



*) No es input, ni lineal PERO es fácil ir eliminando C(x) a medida que aparece:



Que es lineal e input.

Dirigida: S cualquier subconjunto de $\{C_1, \dots , C_6\}$ que no contenga simultáneamente C_4 y C_6 (puede incluir C_3).