

Lógica Curso 2017-18 Semántica en LPO

Ejercicios resueltos - Enunciados

1. Construir un modelo y un contramodelo de la siguiente fórmula sobre el dominio {1,2,3}:

$$\exists x \neg Q(f(x)) \wedge \neg \exists z (\forall y P(z,y) \rightarrow Q(f(z)))$$

2. Demostrar con medios semánticos que el siguiente razonamiento no es correcto utilizando un dominio de dos elementos:

$$\{ \exists x (P(x) \rightarrow Q(x,a)), P(a), \neg R(b), \forall x (Q(x,a) \rightarrow R(b)) \} \models \forall x (P(x) \rightarrow R(x))$$

examen repesca enero 2017

3. Demostrar con medios semánticos que el siguiente razonamiento no es correcto utilizando un dominio de dos elementos:

$$\{ P(b), \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x,a)), \forall x (P(x) \rightarrow \exists y Q(x,y)) \} \models \exists x Q(x,x)$$

eval LPO dicbre 2016

4. Definir un contramodelo para demostrar que la siguiente relación de consecuencia lógica NO se verifica:

$$\{ \forall x (Q(x) \rightarrow R(x)), \forall x (P(x) \rightarrow R(x)), P(a), Q(b) \} \models \exists x (P(x) \wedge Q(x))$$

examen julio 2017

5. Analizar si existe o no relación de consecuencia lógica en los siguientes esquemas de argumentación utilizando razonamiento semántico:

a) $\{ \forall z \exists x P(x,z), \exists x P(x,a) \} \models \exists x \forall z P(x,z)$

b) $\{ \forall x P(x) \rightarrow Q(c) \} \models \exists x (P(x) \rightarrow Q(c))$

6. Averiguar si la fórmula $Q(a,b) \vee Q(c,c)$ es o no consecuencia lógica de cada uno de los siguientes conjuntos:

1) $\{ \exists x P(x), \forall y (P(y) \rightarrow Q(a,y)) \}$

2) $\{ \exists x P(x), \forall y (P(y) \rightarrow Q(c,c)) \}$

eval enero 2016

7. Probar: $\exists x P(x) \rightarrow Q(a) \models \forall x (P(x) \rightarrow Q(a))$

Construir un modelo y un contramodelo de la siguiente fórmula sobre el dominio $\{1,2,3\}$:

$$\exists x \neg Q(f(x)) \wedge \neg \exists z (\forall y P(z,y) \rightarrow Q(f(z)))$$

Definimos una interpretación $I(D, i())$ en el dominio $\{1,2,3\}$

Tendremos tres constantes en el lenguaje de primer orden que utilizaremos $L=\{a,b,c\}$

Definimos la función de interpretación $i()$

Función de interpretación para las constantes:

$$i(a)=1, i(b)=2, i(c)=3$$

Función de interpretación para las funciones:

$$i(f(a))=a, i(f(b))=b, i(f(c))=c$$

Función de interpretación para los predicados:

$$i(Q(a)) = , i(Q(b)) = , i(Q(c)) =$$

$$i(P(a,a)) = , i(P(a,b)) = , i(P(a,c)) =$$

$$i(P(b,a)) = , i(P(b,b)) = , i(P(b,c)) =$$

$$i(P(c,a)) = , i(P(c,b)) = , i(P(c,c)) =$$

Buscamos un **Modelo**, una interpretación que haga verdadera la fórmula:

$$i(\exists x \neg Q(f(x))) \wedge \neg \exists z (\forall y P(z,y) \rightarrow Q(f(z))) = V$$

sii

$$i(\exists x \neg Q(f(x))) = V \quad \text{y} \quad i(\neg \exists z (\forall y P(z,y) \rightarrow Q(f(z)))) = V$$

$$i(\exists x \neg Q(f(x))) = V \text{ sii}$$

$$z=a \quad i(\neg Q(f(a))) = V \quad \text{sii} \quad i(Q(f(a))) = F$$

o bien

$$z=b \quad i(\neg Q(f(b))) = V \quad \text{sii} \quad i(Q(f(b))) = F$$

o bien

$$z=c \quad i(\neg Q(f(c))) = V \quad \text{sii} \quad i(Q(f(c))) = F$$

$$i(\neg \exists z(\forall y P(z,y) \rightarrow Q(f(z)))) = V \quad \text{sii} \quad \exists z(\forall y P(z,y) \rightarrow Q(f(z))) = F$$

$$z=a \quad i(\forall y P(a,y) \rightarrow Q(f(a))) = F \quad \text{sii}$$

$$i(\forall y P(a,y)) = V \quad \text{y} \quad i(Q(f(a))) = F$$

$$i(P(a,a))=V$$

$$\text{y} \quad i(P(a,b))=V$$

$$\text{y} \quad i(P(a,c))=V$$

y

$$z=b \quad i(\forall y P(b,y) \rightarrow Q(f(b))) = F \quad \text{sii}$$

$$i(\forall y P(b,y)) = V \quad \text{y} \quad i(Q(f(b))) = F$$

$$i(P(b,a))=V$$

$$\text{y} \quad i(P(b,b))=V$$

$$\text{y} \quad i(P(b,c))=V$$

y

$$z=c \quad i(\forall y P(c,y) \rightarrow Q(f(c))) = F \quad \text{sii}$$

$$i(\forall y P(c,y)) = V \quad \text{y} \quad i(Q(f(c))) = F$$

$$i(P(c,a))=V$$

$$\text{y} \quad i(P(c,b))=V$$

$$\text{y} \quad i(P(c,c))=V$$

Modelo: $i(Q(a)) = F$, $i(Q(b)) = F$, $i(Q(c)) = F$, $i(P(a,a)) = V$, $i(P(a,b)) = V$, $i(P(a,c)) = V$, $i(P(b,a)) = V$, $i(P(b,b)) = V$, $i(P(b,c)) = V$, $i(P(c,a)) = V$, $i(P(c,b)) = V$, $i(P(c,c)) = V$

Contramodelo

Buscamos un **ContraModelo**, una interpretación que haga falsa la fórmula:

$$i(\exists x \neg Q(f(x)) \wedge \neg \exists z (\forall y P(z, y) \rightarrow Q(f(z)))) = F$$

sii

$$i(\exists x \neg Q(f(x))) = F \quad \text{o bien} \quad i(\neg \exists z (\forall y P(z, y) \rightarrow Q(f(z)))) = F$$

$$i(\exists z \neg Q(f(x))) = F \text{ sii}$$

$$z=a \quad i(\neg Q(f(a))) = F \quad \text{sii} \quad i(Q(f(a))) = V$$

y

$$z=b \quad i(\neg Q(f(b))) = F \quad \text{sii} \quad i(Q(f(v))) = V$$

y

$$z=c \quad i(\neg Q(f(c))) = F \quad \text{sii} \quad i(Q(f(c))) = V$$

Contramodelo: **$i(Q(f(a))) = V, i(Q(f(b))) = V, i(Q(f(c))) = V$**

Demostrar con medios semánticos que el siguiente razonamiento no es correcto utilizando un dominio de dos elementos:

$$\{ \exists x (P(x) \rightarrow Q(x,a)) , P(a) , \neg R(b) , \forall x (Q(x,a) \rightarrow R(b)) \} \models \forall x (P(x) \rightarrow R(x))$$

Examen enero 2017

$$\begin{array}{cccccc} \{ \exists x (P(x) \rightarrow Q(x,a)) , & P(a) , & \neg R(b) , & \forall x (Q(x,a) \rightarrow R(b)) & \} & \models & \forall x (P(x) \rightarrow R(x)) \\ A1 & A2 & A3 & A4 & & & B \end{array}$$

$$D = \{0,1\} \quad I(a) = 0, \quad I(b) = 1$$

Buscamos interpretación I tal que $I(A1) = I(A2) = I(A3) = I(A4) = V$ y $I(B) = F$

$$*) \quad I(A2) = I(P(a)) = V \longrightarrow \boxed{P_D(0) = V}$$

$$*) \quad I(A3) = I(\neg R(b)) = V \longrightarrow I(R(b)) = F \longrightarrow \boxed{R_D(1) = F}$$

$$*) \quad I(B) = I(\forall x (P(x) \rightarrow R(x))) = F \longrightarrow I(\exists x \neg (P(x) \rightarrow R(x))) = V \longrightarrow I(\exists x (\neg P(x) \vee \neg R(x))) = V$$

para $x=b$ $I(\neg P(b) \vee \neg R(b)) = V$ pues $I(\neg R(b)) = V$

$$*) \quad I(A4) = I(\forall x (Q(x,a) \rightarrow R(b))) = V$$

como $I(R(b)) = F$ $I(\forall x (Q(x,a))) = F$

para $x=a$ $I(Q(a,a)) = F$ $\boxed{Q_D(0,0) = F}$

para $x=b$ $I(Q(b,a)) = F$ $\boxed{Q_D(1,0) = F}$

$$*) \quad I(A1) = I(\exists x (P(x) \rightarrow Q(x,a))) = V$$

para $x=a$ $I(P(a) \rightarrow Q(a,a)) = F$ pues $P_D(0) = V$ y $Q_D(0,0) = F$

debe ser $I(P(b) \rightarrow Q(b,a)) = V$

como $Q_D(1,0) = F$ $I(P(b)) = F$ $\boxed{P_D(1) = F}$

\Rightarrow cualquier interpretación I que cumpla las condiciones anteriores es el contramodelo buscado, independientemente de cómo sean $R_D(1)$, $Q_D(0,0)$ y $Q_D(1,0)$

Solución de Andrei:

$D=\{0,1\}$, $i(a)=0$, $i(b)=1$.

A1: $i(\exists x (P(x) \rightarrow Q(x,a)))=V$ sii $\{x/a\} i(P(a) \rightarrow Q(a,a))=V$ o $\{x/b\} i(P(b) \rightarrow Q(b,a))=V$ sii

$i(P(a))=F$ o $i(Q(a,a))=V$ o $i(P(b))=F$ o $i(Q(b,a))=V$ A1a o A1b o A1c o A1d

A2: $i(P(a))=V$ A2

A3: $i(\neg R(b))=V$ sii $i(R(b))=F$ A3

A4: $i(\forall x (Q(x,a) \rightarrow R(b)))=V$ sii $\{x/a\} i(Q(a,a) \rightarrow R(b))=V$ y $\{x/b\} i(Q(b,a) \rightarrow R(b))$ sii

$[i(Q(a,a))=F \text{ o } i(R(b))=V]$ y $[i(Q(b,a))=F \text{ o } i(R(b))=V]$ [A4a o A4b] y [A4c o A4d]

B: $i(\forall x (P(x) \rightarrow R(x)))=F$ sii $\{x/a\} i(P(a) \rightarrow R(a))=F$ o $\{x/b\} i(P(b) \rightarrow R(b))=F$ sii

$[i(P(a))=V \text{ y } i(R(a))=F]$ o $[i(P(b))=V \text{ y } i(R(b))=F]$ [Ba y Bb] o [Bc y Bd]

Discusión: A2 entra en conflicto con A1a; A3 entra en conflicto con A4b y A4d, tenemos ahora:

A1: (A1b o A1c o A1d) con A4:(A4a y A4c) pero A4a entra en conflicto con A1b y A4c con A1d, entonces:

A1c, A2, A3, A4a, A4c: $i(P(b))=F$, $i(P(a))=V$, $i(R(b))=F$, $i(Q(a,a))=F$, $i(Q(b,a))=F$

Pero Bc entra en conflicto con A1c, entonces tenemos desde B: $i(P(a))=V$ y $i(R(a))=F$

Ba es compatible con A2 y podemos definir en la interpretación de R que $i(R(a))=F$:

No es consecuencia lógica, un contraejemplo que lo demuestra es:

$i(P^1)=\{ \langle 0 \rangle \Rightarrow V, \langle 1 \rangle \Rightarrow F \}$

$i(Q^2)=\{ \langle 0,0 \rangle \Rightarrow F, \langle 0,1 \rangle \Rightarrow V, \langle 1,0 \rangle \Rightarrow F, \langle 1,1 \rangle \Rightarrow V \}$

$i(R^1)=\{ \langle 0 \rangle \Rightarrow F, \langle 1 \rangle \Rightarrow F \}$

Demostrar con medios semánticos que el siguiente razonamiento no es correcto utilizando un dominio de dos elementos:

$$\{ P(b), \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x,a)), \forall x (P(x) \rightarrow \exists y Q(x,y)) \} \models \exists x Q(x,x)$$

eval LPO dicbre 2016

$D=\{0,1\}$, $i(a)=0$, $i(b)=1$.

$i(\exists x Q(x,x))=F$ sii

$\{x/a\} i(Q(a,a))=F$

Y además,

$\{x/b\} i(Q(b,b))=F$

$i(P(b))=V$

$i(\exists x (P(x) \wedge \neg Q(x,a)))=V$ sii

$\{x/a\} i(P(a) \wedge \neg Q(a,a))=V$ sii

$i(P(a))=V$ y además $i(Q(a,a))=F$ (tras descartar ~~$i(Q(b,a))=F$~~ abajo)

O bien,

$\{x/b\} i(P(b) \wedge \neg Q(b,a))=V$

$i(P(b))=V$ y además ~~$i(Q(b,a))=F$~~ (descartado más abajo)

$i(\forall x (P(x) \rightarrow \exists y Q(x,y)))=V$ sii

$\{x/a\} i(P(a) \rightarrow \exists y Q(a,y))=V$ sii

~~$i(P(a))=F$~~

O bien,

$i(\exists y Q(a,y))=V$ sii

$\{x/a\} i(Q(a,a))=V$

O bien,

$\{x/b\} i(Q(a,b))=V$

$\{x/b\} i(P(b) \rightarrow \exists y Q(b,y))=V$

~~$i(P(b))=F$~~

O bien,

$i(\exists y Q(b,y))=V$ sii

$\{x/a\} i(Q(b,a))=V$

O bien,

~~$\{x/b\} i(Q(b,b))=V$~~

No es consecuencia lógica, el contramodelo que lo demuestra es: $P_D(0)=V$, $P_D(1)=V$, $Q_D(0,1)=V$, $Q_D(1,0)=V$, $Q_D(0,0)=F$, $Q_D(1,1)=F$.

Definir un contramodelo para demostrar que la siguiente relación de consecuencia lógica NO se verifica:

$$\{ \forall x (Q(x) \rightarrow R(x)), \forall x (P(x) \rightarrow R(x)), P(a), Q(b) \} \models \exists x (P(x) \wedge Q(x))$$

Examen julio 2017

$$\frac{\forall x (Q(x) \rightarrow R(x))}{A_1}, \frac{\forall x (P(x) \rightarrow R(x))}{A_2}, \frac{P(a)}{A_3}, \frac{Q(b)}{A_4} \models \frac{\exists x (P(x) \wedge Q(x))}{B}$$

Buscamos una interpretación i tal que

$$\begin{array}{l} \forall x (Q(x) \rightarrow R(x)) \\ \forall x (P(x) \rightarrow R(x)) \quad \text{sean} \quad V \quad \quad \quad y \quad \quad \quad \exists x (P(x) \wedge Q(x)) \quad \text{sea} \quad F \\ P(a) \\ Q(b) \end{array}$$

Tomamos como dominio $D = \{a, b\}$

1ª solución:

$$\begin{array}{l} - i(A_3) = V \longrightarrow \boxed{i(P(a)) = V} \\ - i(A_4) = V \longrightarrow \boxed{i(Q(b)) = V} \\ - i(A_2) \equiv i(\forall x (P(x) \rightarrow R(x))) = V \\ \quad \left. \begin{array}{l} x = a \quad i(P(a) \rightarrow R(a)) = V \\ \quad \quad i(P(a)) = V \end{array} \right\} \longrightarrow \boxed{i(R(a)) = V} \\ \quad y \quad x = b \quad i(P(b) \rightarrow R(b)) = V \longrightarrow i(P(b)) = F \quad \text{ó} \quad i(R(b)) = V \quad (1) \\ - i(A_1) \equiv i(\forall x (Q(x) \rightarrow R(x))) = V \\ \quad \quad x = a \quad i(Q(a) \rightarrow R(a)) = V \quad \text{se cumple} \quad \text{pues} \quad i(R(a)) = V \\ \quad \quad y \quad x = b \quad \left. \begin{array}{l} i(Q(b) \rightarrow R(b)) = V \\ \quad \quad i(Q(b)) = V \end{array} \right\} \longrightarrow \boxed{i(R(b)) = V} \end{array}$$

por tanto, al ser $i(R(b))=V$, también se cumple (1), y A_2 es V

$$\begin{array}{l} - i(B) \equiv i(\exists x (P(x) \wedge Q(x))) = F \\ \quad \left. \begin{array}{l} x = a \quad i(P(a) \wedge Q(a)) = F \\ \quad \quad i(P(a)) = V \end{array} \right\} \longrightarrow \boxed{i(Q(a)) = F} \\ \quad y \quad \left. \begin{array}{l} x = b \quad i(P(b) \wedge Q(b)) = F \\ \quad \quad i(Q(b)) = V \end{array} \right\} \longrightarrow \boxed{i(P(b)) = F} \end{array}$$

Hemos encontrado un contramodelo:
que además es el único contramodelo

$$P_D = \{a\} \quad Q_D = \{b\} \quad R_D = \{a, b\}$$

Por supuesto que hay otras formas de hacer este análisis. Si empezamos por hacer falsa la conclusión B:

2ª solución:

$$- i(A_3) = V \longrightarrow \boxed{i(P(a)) = V}$$

$$- i(A_4) = V \longrightarrow \boxed{i(Q(b)) = V}$$

$$- i(B) \equiv i(\exists x (P(x) \wedge Q(x))) = F$$

$$x = a \quad i(P(a) \wedge Q(a)) = F \quad \left. \begin{array}{l} i(P(a)) = F \text{ ó } i(Q(a)) = F \\ \text{como } i(P(a)) = V \end{array} \right\} \longrightarrow \boxed{i(Q(a)) = F}$$

$$y \quad x = b \quad i(P(b) \wedge Q(b)) = F \quad \left. \begin{array}{l} i(P(b)) = F \text{ ó } i(Q(b)) = F \\ \text{como } i(Q(b)) = V \end{array} \right\} \longrightarrow \boxed{i(P(b)) = F}$$

$$- i(A_1) \equiv i(\forall x (Q(x) \rightarrow R(x))) = V$$

$$x = a \quad i(Q(a) \rightarrow R(a)) = V \quad \text{se cumple pues } i(Q(a)) = F$$

$$y \quad x = b \quad i(Q(b) \rightarrow R(b)) = V \quad \left. \begin{array}{l} i(Q(b)) = F \text{ ó } i(R(b)) = V \\ \text{como } i(Q(b)) = V \end{array} \right\} \longrightarrow \boxed{i(R(b)) = V}$$

$$- i(A_2) \equiv i(\forall x (P(x) \rightarrow R(x))) = V$$

$$x = a \quad i(P(a) \rightarrow R(a)) = V \quad \left. \begin{array}{l} i(P(a)) = F \text{ ó } i(R(a)) = V \\ \text{como } i(P(a)) = V \end{array} \right\} \longrightarrow \boxed{i(R(a)) = V}$$

$$y \quad x = b \quad i(P(b) \rightarrow R(b)) = V \quad \text{se cumple pues } i(P(b)) = F$$

Se obtiene el **mismo resultado** que en la 1ª solución.

Analizar si existe o no relación de consecuencia lógica en los siguientes esquemas de argumentación utilizando razonamiento semántico:

- a) $\{\forall z \exists x P(x,z), \exists x P(x,a)\} \models \exists x \forall z P(x,z)$
 b) $\{\forall x P(x) \rightarrow Q(c)\} \models \exists x (P(x) \rightarrow Q(c))$
-

Para comprobar si hay consecuencia lógica, comprobamos si existen contramodelos (que hagan verdaderas las premisas y falsa la conclusión) para cada una de las argumentaciones. Buscamos contramodelos con dominio $D = \{a,b,c\}$

- a) $\{\forall z \exists x P(x,z), \exists x P(x,a)\} \models \exists x \forall z P(x,z)$

Premisas

$$\forall z \exists x P(x,z) = V$$

$$z = a \quad \exists x P(x,a) = V \text{ sii}$$

$$x = a \quad \mathbf{P(a,a)=V}$$

$$o \quad x = b \quad P(b,a)=V$$

$$o \quad x = c \quad P(c,a)=V$$

$$y \quad z = b \quad \exists x P(x,b) = V \text{ sii}$$

$$x = a \quad P(a,b)=V$$

$$o \quad x = b \quad \mathbf{P(b,b)=V}$$

$$o \quad x = c \quad P(c,b)=V$$

$$y \quad z = c \quad \exists x P(x,c) = V \text{ sii}$$

$$x = a \quad P(a,c)=V$$

$$o \quad x = b \quad P(b,c)=V$$

$$o \quad x = c \quad \mathbf{P(c,c)=V}$$

$$y \quad \exists x P(x,a) = V$$

$$x = a \quad \mathbf{P(a,a)=V}$$

- o $x=b$ $P(b,a)=V$
- o $x=c$ $P(c,a)=V$

Conclusión

$$\exists x \forall z P(x,z) = F$$

$$x=a \quad \forall z P(a,z) = F \text{ sii}$$

$$z=a \quad P(a,a)=F$$

$$\text{ó} \quad z=b \quad \mathbf{P(a,b)=F}$$

$$\text{ó} \quad z=c \quad P(a,c)=F$$

$$\text{y} \quad x=b \quad \forall z P(b,z) = F \text{ sii}$$

$$z=a \quad \mathbf{P(b,a)=F}$$

$$\text{ó} \quad z=b \quad P(b,b)=F$$

$$\text{ó} \quad z=c \quad P(b,c)=F$$

$$\text{y} \quad x=c \quad \forall z P(c,z) = F \text{ sii}$$

$$z=a \quad \mathbf{P(c,a)=F}$$

$$\text{ó} \quad z=b \quad P(c,b)=F$$

$$\text{ó} \quad z=c \quad P(c,c)=F$$

Existe al menos un contramodelo ($P(a,a)=V$ y $P(b,b)=V$ y $P(c,c)=V$; $P(a,b)=F$ y $P(b,a)=F$ y $P(c,a)=F$), luego no hay consecuencia lógica.

$$b) \quad \{\forall x P(x) \rightarrow Q(c)\} \models \exists x (P(x) \rightarrow Q(c))$$

Premisas

$$\forall x P(x) \rightarrow Q(c) = V \text{ sii}$$

$$\forall x P(x) = F \quad \text{sii}$$

$$x= a \quad P(a) = F$$

$$\text{o} \quad x= b \quad P(b) = F$$

$$\text{o} \quad x=c \quad P(c) = F$$

$$\text{o} \quad Q(c)=V$$

Conclusión

$$\exists x(P(x) \rightarrow Q(c)) = F \text{ sii}$$

$$x=a \quad P(a) \rightarrow Q(c) = F \text{ sii}$$

$$P(a)=V \text{ y } Q(c)=F$$

$$\text{y} \quad x=b \quad P(b) \rightarrow Q(c) = F \text{ sii}$$

$$P(b)=V \text{ y } Q(c)=F$$

$$\text{y} \quad x=c \quad P(c) \rightarrow Q(c) = F \text{ sii}$$

$$P(c)=V \text{ y } Q(c)=F$$

Analizamos las opciones:

$Q(c)=V$ en la premisa es incompatible con $Q(c)=F$ que se tiene que cumplir en todas las opciones de la conclusión.

$P(a)=F$ en la premisa es incompatible con $P(a)=V$ que debe cumplirse en la primera alternativa de la conclusión. $P(b)=F$ en la premisa es incompatible con $P(b)=V$ que debe cumplirse en la segunda alternativa de la conclusión. $P(c)=F$ en la premisa es incompatible con $P(c)=V$ que debe cumplirse en la tercera alternativa de la conclusión.

No es posible encontrar un contramodelo que haga simultáneamente verdaderas las premisas y falsa la conclusión, luego existe consecuencia lógica.

Averiguar si la fórmula $Q(a,b) \vee Q(c,c)$ es o no consecuencia lógica de cada uno de los siguientes conjuntos:

1) $\{ \exists x P(x) , \forall y (P(y) \rightarrow Q(a,y)) \}$

2) $\{ \exists x P(x) , \forall y (P(y) \rightarrow Q(c,c)) \}$

eval enero 2016

1) Llamamos $A_1 \equiv \exists x P(x)$

$$A_2 \equiv \forall y (P(y) \rightarrow Q(a,y))$$

$$B \equiv Q(a,b) \vee Q(c,c)$$

- Buscamos un contramodelo, es decir i tal que $i(A_1) = i(A_2) = V$ y $i(B) = F$

- Tomamos como dominio $D = \{1,2,3\}$, por ejemplo

- $i(a) = 1$ $i(b) = 2$ $i(c) = 3$ por ejemplo

- $i(B) = i(Q(a,b) \vee Q(c,c)) = F$

$i(Q(a,b)) = i(Q(c,c)) = F$

$Q_D(1,2) = Q_D(3,3) = F$

- $i(A_2) = i(\forall y (P(y) \rightarrow Q(a,y))) = V$ sii

$i(P(a) \rightarrow Q(a,a)) = V$ sii $i(P(a)) = F$ ó $i(Q(a,a)) = V$ (1)

y $i(P(b) \rightarrow Q(a,b)) = V$ sii $i(P(b)) = F$ ó $i(Q(a,b)) = V$

y $i(P(c) \rightarrow Q(a,c)) = V$ sii $i(P(c)) = F$ ó $i(Q(a,c)) = V$ (2)

- $i(A_1) = i(\exists x P(x)) = V$ sii $i(P(a)) = V$ ó $i(P(b)) = V$ ó $i(P(c)) = V$ (3)

- para hacer compatibles (1), (2) y (3) elegimos

$i(P(a)) = V$

y $i(Q(a,a)) = V$

- los demás valores de $i(Q(x,y))$ pueden ser V o $F \Rightarrow$ hay unos cuantos contramodelos con ese dominio y las interpretaciones de a , b y c antes fijadas

\Rightarrow se ha encontrado un contramodelo \Rightarrow **NO es consecuencia lógica**

2) Sean $A_1 \equiv \exists x P(x)$

$A_2 \equiv \forall y (P(y) \rightarrow Q(c,c))$

$B \equiv Q(a,b) \vee Q(c,c)$

- En este caso **SÍ** es consecuencia lógica:
- Una demostración con deducción natural es la siguiente:

1.-	$\exists x P(x)$	premisa
2.-	$\forall y (P(y) \rightarrow Q(c,c))$	premisa
3.-	$P(d)$	elim 1, d constante temporal nueva
4.-	$P(d) \rightarrow Q(c,c)$	elim 3
5.-	$Q(c,c)$	modus ponens 3, 4
6.-	$Q(a,b) \vee Q(c,c)$	int \vee 5

- por tanto $\{ A_1, A_2 \} \vdash B$
- y por el teorema de completud $\{ A_1, A_2 \} \models B$
- demostración semántica:

buscamos un contramodelo, i.e., i tal que $i(A_1) = i(A_2) = V$ y $i(B) = F$

$i(B) = F \quad i(Q(a,b) \vee Q(c,c)) = F$

$Q_I(a,b) = Q_I(c,c) = F$

$i(A_2) = V \quad i(\forall y (P(y) \rightarrow Q(c,c))) = V$

$y = a \quad i(P(a) \rightarrow Q(c,c)) = V$

$y = b \quad i(P(b) \rightarrow Q(c,c)) = V$

$y = c \quad i(P(c) \rightarrow Q(c,c)) = V$

como $Q_I(c,c) = F$

$P_I(a) = P_I(b) = P_I(c) = F$

(1)

$i(A_3) = V \quad i(\exists x P(x)) = V$ que no es compatible con (1)

\Rightarrow No hay contramodelo \Rightarrow **SÍ es consecuencia lógica.**

Probar: $\exists x P(x) \rightarrow Q(a) \models \forall x (P(x) \rightarrow Q(a))$

$$\begin{array}{ccc} \exists x P(x) \rightarrow Q(a) & \models & \forall x (P(x) \rightarrow Q(a)) \\ A & & B \end{array}$$

1) Forma indirecta: buscamos interpretación I tal que $I(A) = V$ y $I(B) = F$

$$I(B) = F \quad I(\forall x (P(x) \rightarrow Q(a))) = F \quad \text{sii} \quad I(P(i) \rightarrow Q(a)) = F \quad \text{para algún } i \in L(D)$$

$$\text{sii} \quad I(P(i)) = V \quad \text{para algún } i \in L(D) \quad \text{y} \quad I(Q(a)) = F$$

$$\text{sii} \quad \exists x P(x) \quad \text{y} \quad I(Q(a)) = F \quad \Rightarrow \quad i(A) = F$$

$$\Rightarrow \text{No es posible encontrar un contramodelo} \quad \Rightarrow \quad \text{Sí es consecuencia lógica}$$

2) Directamente: sea I interpretación cualquiera tal que $I(A) = V$; hay que probar $I(B) = V$

$$I(A) = I(\exists x P(x) \rightarrow Q(a)) = V \quad I(\exists x P(x)) = F \quad \text{ó} \quad I(Q(a)) = V$$

$$\text{1er caso:} \quad I(\exists x P(x)) = F \quad I(\neg \exists x P(x)) = V \quad I(\forall x \neg P(x)) = V$$

$$I(\neg P(i)) = V \quad \text{para todo } i \in (D) \quad I(P(i)) = F \quad \text{para todo } i \in (D)$$

$$I(P(i) \rightarrow Q(a)) = V \quad \text{para todo } i \in (D) \quad I(B) = V$$

$$\text{2º caso:} \quad I(Q(a)) = V \quad I(P(i) \rightarrow Q(a)) = V \quad \text{para todo } i \in (D) \quad I(B) = V$$