

Ejercicios resueltos - Enunciados

1. Obtener la forma clausular de la siguiente estructura deductiva $T [A_1, A_2] \vdash B$:

$$A_1: \forall x P(x) \rightarrow \forall y Q(z, y) \vee Q(a)$$

$$A_2: \exists x P(x) \vee \forall y \neg Q(y) \rightarrow \exists z P(a, z)$$

$$B: \exists x \forall y \neg P(x, y) \rightarrow \forall y \exists x Q(x, y)$$

2. Obtener la forma clausular de la siguiente estructura deductiva:

$$\neg \forall x (P(x, a) \rightarrow \exists y Q(x, y)), \forall x P(x, y) \vee \forall x \exists y Q(x, y) \vdash \exists x (\neg P(x, x) \wedge \forall y Q(x, y))$$

3. Para las dos fórmulas siguientes, decir si las posibles formas clausulares que aparecen a continuación son correctas o incorrectas, en todos los casos:

$$\forall x (\neg P(x) \rightarrow \exists y \neg Q(y, f(a)) \vee R(x))$$

$$a.1) P(x) \vee \neg Q(a, f(a)) \vee R(x)$$

$$a.2) P(x) \vee \neg Q(b, f(a)) \vee R(x)$$

$$a.3) P(x) \vee \neg Q(f(x), f(a)) \vee R(x)$$

$$a.4) P(x) \vee \neg Q(g(x), f(a)) \vee R(x)$$

$$\forall x (\exists y x \geq y \rightarrow \exists z Q(f(x, a), z) \wedge P(x))$$

$$b.1) \neg(x \geq y) \vee P(x), \neg(x \geq y) \vee Q(f(x, a), g(x, y))$$

$$b.2) \neg(x \geq y) \vee Q(f(x, a), g(x, y)), P(x)$$

$$b.3) \neg(x \geq y) \vee P(x), \neg(x \geq y) \vee Q(f(x, a), g(x))$$

$$b.4) x \geq y \vee Q(f(x, a), g(x)) \vee P(x)$$

Obtener la forma clausular de la siguiente estructura deductiva $T [A_1, A_2] \vdash B$

$$A_1: \forall x P(x) \rightarrow \forall y Q(z,y) \vee Q(a)$$

$$A_2: \exists x P(x) \vee \forall y \neg Q(y) \rightarrow \exists z P(a,z)$$

$$B: \exists x \forall y \neg P(x,y) \rightarrow \forall y \exists x Q(x,y)$$

$$A_1 \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall y Q(z,y) \vee Q(a)$$

$$\exists x \forall y (\neg P(x) \vee Q(z,y) \vee Q(a))$$

$$\exists z \exists x \forall y (\neg P(x) \vee Q(z,y) \vee Q(a))$$

$$\Rightarrow FC(A_1) = \{ \neg P(b) \vee Q(c,y) \vee Q(a) \}$$

$$A_2 \equiv \exists x P(x) \vee \forall y \neg Q(y) \rightarrow \exists z P(a,z)$$

$$\exists z \exists y \forall x ((\neg (P(x) \vee \neg Q(y)) \vee P(a,z)))$$

$$\exists z \exists y \forall x ((\neg P(x) \wedge Q(y)) \vee P(a,z))$$

$$\exists z \exists y \forall x (\neg P(x) \vee P(a,z)) \wedge (Q(y) \vee P(a,z)))$$

$$\Rightarrow FC(A_2) = \{ \neg P(x) \vee P(a,d) , Q(e) \vee P(a,d) \}$$

$$B \equiv \exists x \forall y \neg P(x,y) \wedge \forall y \exists x Q(x,y)$$

$$\neg B \equiv \forall x \exists y P(x,y) \vee \exists y \forall x \neg Q(x,y)$$

$$\forall x \exists y \forall x' (P(x,y) \vee \neg Q(x',y))$$

$$\Rightarrow FC(\neg B) = \{ P(x,f(x)) \vee \neg Q(x',f(x)) \}$$

Forma clausular de la estructura deductiva:

$$FC = \{ \neg P(b) \vee Q(c,y) \vee Q(a) , \neg P(x) \vee P(a,d) , Q(e) \vee P(a,d) , P(x,f(x)) \vee \neg Q(x',f(x)) \}$$

Fallo, en solución de B, modo de operar:

$$\neg B \equiv \neg (\exists x \forall y \neg P(x,y) \rightarrow \forall y \exists x Q(x,y))$$

Renombro, exteriorizo cuantificadores dentro de la negación de la conectiva principal, interiorizo la negación de la conectiva principal (cambiando cuantificadores)...

El resultado prenex es:

$$\exists x \forall y \exists y' \forall x' \neg (\neg P(x,y) \rightarrow Q(x',y'))$$

Obtener la forma clausular de la siguiente estructura deductiva:

$$[\neg \forall x (P(x,a) \rightarrow \exists y Q(x,y)) , \forall x P(x,y) \vee \forall x \exists y Q(x,y)] \vdash \exists x (\neg P(x,x) \wedge \forall y Q(x,y))$$

$$A_1 \equiv \neg \forall x (P(x,a) \rightarrow \exists y Q(x,y))$$

$$A_2 \equiv \forall x P(x,y) \vee \forall x \exists y Q(x,y)$$

$$B \equiv \exists x (\neg P(x,x) \wedge \forall y Q(x,y))$$

$$\{A_1, A_2\} \vdash B \Leftrightarrow A_1 \wedge A_2 \wedge \neg B \text{ insatisfacible}$$

$$A_1 \equiv \neg \forall x (P(x,a) \rightarrow \exists y Q(x,y))$$

$$\exists x \neg (P(x,a) \rightarrow \exists y Q(x,y))$$

$$\exists x \neg \exists y (P(x,a) \rightarrow Q(x,y))$$

$$F \text{ prenex} \equiv \exists x \forall y \neg (P(x,a) \rightarrow Q(x,y))$$

\equiv cierre existencial

$$\neg (P \rightarrow Q) \leftrightarrow \neg (\neg P \vee Q) \leftrightarrow P \wedge \neg Q$$

$$FN \text{ Conjuntiva: } \exists x \forall y (P(x,a) \wedge \neg Q(x,y))$$

$$\text{Forma clausular: } x \rightarrow b \text{ (constante nueva)}$$

$$\Rightarrow C_1 \equiv \{ P(b,a) , \neg Q(b,y) \}$$

$$A_2 \equiv \forall x P(x,y) \vee \forall x \exists y Q(x,y)$$

$$(\text{ Ojo!! } \forall x A \vee \forall x B \not\leftrightarrow \forall x (A \vee B))$$

$$\forall x (P(x,y) \vee \forall x \exists y Q(x,y))$$

$$\forall x (P(x,y) \vee \forall z \exists y Q(z,y))$$

$$\forall x \forall z (P(x,y) \vee \exists y Q(z,y))$$

$$\forall x \forall z (P(x,y) \vee \exists v Q(z,v))$$

$$\text{Forma prenex: } \forall x \forall z \exists v (P(x,y) \vee Q(z,v))$$

$$\text{Cierre existencial: } \exists y \forall x \forall z \exists v (P(x,y) \vee Q(z,v))$$

$$\text{Forma clausular: } y \rightarrow c \text{ (constante nueva)}$$

$$v \rightarrow f(x,z)$$

$$\Rightarrow C_2 \equiv \{ P(x,c) \vee Q(z, f(x,z)) \}$$

$$\neg B \equiv \forall x \neg (\neg P(x,x) \wedge \forall y Q(x,y))$$

$$\forall x \neg \forall y (\neg P(x,x) \wedge Q(x,y))$$

$$\text{Forma prenex: } \forall x \exists y \neg (\neg P(x,x) \wedge Q(x,y))$$

$$\text{FN Conjuntiva } \forall x \exists y (P(x,x) \vee \neg Q(x,y))$$

$$\text{Forma clausular: } y \rightarrow g(x)$$

$$\Rightarrow \neg B \equiv \{ P(x,x) \vee \neg Q(x,g(x)) \}$$

Forma clausular de la estructura deductiva:

$$C \equiv \{ P(b,a) , \neg Q(b,y) , P(x,c) \vee Q(z, f(x,z)) , P(x,x) \vee \neg Q(x,g(x)) \}$$

Para las dos fórmulas siguientes, decir si las posibles formas clausulares que aparecen a continuación son correctas o incorrectas, en todos los casos:

$$\forall x (\neg P(x) \rightarrow \exists y \neg Q(y, f(a)) \vee R(x))$$

$$a.1) P(x) \vee \neg Q(a, f(a)) \vee R(x)$$

$$a.2) P(x) \vee \neg Q(b, f(a)) \vee R(x)$$

$$a.3) P(x) \vee \neg Q(f(x), f(a)) \vee R(x)$$

$$a.4) P(x) \vee \neg Q(g(x), f(a)) \vee R(x)$$

$$\forall x (\exists y x \geq y \rightarrow \exists z Q(f(x, a), z) \wedge P(x))$$

$$b.1) \neg(x \geq y) \vee P(x) \quad , \quad \neg(x \geq y) \vee Q(f(x, a), g(x, y))$$

$$b.2) \neg(x \geq y) \vee Q(f(x, a), g(x, y)) \quad , \quad P(x)$$

$$b.3) \neg(x \geq y) \vee P(x) \quad , \quad \neg(x \geq y) \vee Q(f(x, a), g(x))$$

$$b.4) x \geq y \vee Q(f(x, a), g(x)) \vee P(x)$$

1. $\forall x (\neg P(x) \rightarrow \exists y \neg Q(y, f(a)) \vee R(x))$

- Forma prenex :

$$\forall x \exists y (\neg P(x) \rightarrow \neg Q(y, f(a)) \vee R(x))$$

- FN Conjuntiva:

$$\neg A \rightarrow \neg B \vee C \equiv \neg \neg A \vee (\neg B \vee C) \equiv A \vee \neg B \vee C$$

$$\forall x \exists y (P(x) \vee \neg Q(y, f(a)) \vee R(x))$$

- FN Skolem:

$$y \rightarrow g(x)$$

$$P(x) \vee \neg Q(g(x), f(a)) \vee R(x)$$

\Rightarrow Forma clausular: una sola cláusula:

$$\{ P(x) \vee \neg Q(g(x), f(a)) \vee R(x) \}$$

\Rightarrow solo es correcta a.4)

2. $\forall x (\exists y x \geq y \rightarrow \exists z Q(f(x, a), z) \wedge P(x))$

- Forma prenex:

hay 2 formas de empezar:

$$2.1 \quad \forall x \forall y (x \geq y \rightarrow \exists z Q(f(x, a), z) \wedge P(x))$$

$$2.2 \quad \forall x \exists z (\exists y x \geq y \rightarrow Q(f(x, a), z) \wedge P(x))$$

$$2.1 \quad \forall x \forall y \exists z (x \geq y \rightarrow Q(f(x, a), z) \wedge P(x))$$

$$2.2 \quad \forall x \exists z \forall y (x \geq y \rightarrow Q(f(x, a), z) \wedge P(x))$$

A B C

- FN Conjuntiva:

$$A \rightarrow B \wedge C \equiv \neg A \vee (B \wedge C) \equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee C)$$

- FN Skolem:

$$\begin{aligned} 2.1 \quad & z \leftrightarrow g(x,y) \\ & (\neg(x \geq y) \vee Q(f(x,a), g(x,y))) \wedge (\neg(x \geq y) \vee P(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.2 \quad & z \leftrightarrow g(x) \\ & (\neg(x \geq y) \vee Q(f(x,a), g(x))) \wedge (\neg(x \geq y) \vee P(x)) \end{aligned}$$

\Rightarrow Forma clausular:

$$2.1 \quad \{ \neg(x \geq y) \vee Q(f(x,a), g(x,y)) , \neg(x \geq y) \vee P(x) \}$$

$$2.2 \quad \{ \neg(x \geq y) \vee Q(f(x,a), g(x)) , \neg(x \geq y) \vee P(x) \}$$

\Rightarrow son correctas b.1) y b.3)