Lógica Curso 2016-17 Semántica en LPO

Ejercicios resueltos - Enunciados

1. Construir un modelo y un contramodelo de la siguiente fórmula sobre el dominio {1,2,3}:

$$\exists x \neg Q(f(x)) \wedge \neg \exists z(\forall y P(z,y) \rightarrow Q(f(z)))$$

2. Sea L el lenguaje { R , a , b , c }, donde R(x,y) es un símbolo de predicado y a, b, c son constantes. Definir un contramodelo en un dominio de 3 elementos para demostrar lo siguiente:

$$\forall x \exists y\, R(x,f(y)) \not\models \exists y \forall x\, R(x,f(y))$$

Justificar adecuadamente la respuesta con un análisis semántico.

3. Definir un contramodelo para demostrar que la siguiente relación de consecuencia lógica no se verifica:

$$\{ \forall x\, (P(x) \rightarrow R(x)) , \forall x\, (Q(x) \rightarrow R(x)) , P(a) , Q(b) \} \models \exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$$

4. Analizar si existe o no relación de consecuencia lógica en los siguientes esquemas de argumentación utilizando razonamiento semántico:

   a) $\{ \forall z \exists x\, P(x,z) , \exists x\, P(x,a) \} \models \exists x \forall z\, P(x,z)$

   b) $\{ \forall x P(x) \rightarrow Q(c) \} \models \exists x\, (P(x) \rightarrow Q(c))$

5. Averiguar si la fórmula $Q(a,b) \vee Q(c,c)$ es o no consecuencia lógica de cada uno de los siguientes conjuntos:

   1) $\{ \exists x\, P(x) , \forall y\, (P(y) \rightarrow Q(a,y)) \}$

   2) $\{ \exists x\, P(x) , \forall y\, (P(y) \rightarrow Q(c,c)) \}$

6. Probar: $\exists x\, P(x) \rightarrow Q(a) \models \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(a))$

Construir un modelo y un contramodelo de la siguiente fórmula sobre el dominio {1,2,3}:

$$\exists x \neg Q(f(x)) \wedge \neg \exists z(\forall y P(z,y) \rightarrow Q(f(z)))$$

Definimos un interpretación I(D, i()) en el dominio {1,2,3}

Tendremos tres constantes en el lenguaje de primer orden que utlizaremos L={a,b,c}

Definimos la función de interpretación i()

Función de interpretación para las constantes:

i(a)=1, i(b)=2, i(c)=3

Función de interpretación para las funciones:

i(f(a))=a, i(f(b))=b, i(f(c))=c

Función de interpretación para los predicados:

i(Q(a)) = , i(Q(b)) = , i(Q(c))=

i(P(a,a)) = , i(P(a,b)) = , i(P(a,c)) =

i(P(b,a)) = , i(P(b,b)) = , i(P(b,c)) =

i(P(c,a)) = , i(P(c,b)) = , i(P(c,c)) =

Buscamos un **Modelo**, una interpretación que haga verdadera la fórmula:

$$i(\exists x \neg Q(f(x))) \wedge \neg \exists z(\forall y P(z,y) \rightarrow Q(f(z)))) = V$$

sii

$i(\exists x \neg Q(f(x))) = V$ **y** $i(\neg \exists z(\forall y P(z,y) \rightarrow Q(f(z)))) = V$

$i(\exists x \neg Q(f(x))) = V$ sii

z=a $i(\neg Q(f(a))) = V$ sii $\mathbf{i(Q(f(a))) = F}$

o bien

z=b $i(\neg Q(f(b))) = V$ sii $\mathbf{i(Q(f(b))) = F}$

o bien

z=c i(¬Q(f(c))) = V sii **i(Q(f(c))) = F**

i(¬∃z(∀yP(z,y) → Q(f(z)))) = V sii ∃z(∀yP(z,y) → Q(f(z))) = F

z=a i(∀yP(a,y) → Q(f(a))) = F sii

i(∀yP(a,y)) = V y **i(Q(f(a))) = F**

i(P(a,a))=V

y **i(P(a,b))=V**

y **i(P(a,c))=V**

y

z=b i(∀yP(b,y) → Q(f(b))) = F sii

i(∀yP(b,y)) = V y **i(Q(f(b)) = F**

i(P(b,a))=V

y **i(P(b,b))=V**

y **i(P(b,c))=V**

y

z=c i(∀yP(b,y) → Q(f(b))) = F sii

i(∀yP(c,y)) = V y **i(Q(f(c))) = F**

i(P(c,a))=V

y **i(P(c,b))=V**

y **i(P(c,c))=V**

Modelo: i(Q(a)) = F, i(Q(b)) = F, i(Q(c))= F, i(P(a,a)) = V, i(P(a,b)) = V, i(P(a,c)) = V, i(P(b,a)) = V, i(P(b,b)) = V, i(P(b,c)) = V, i(P(c,a)) = V, i(P(c,b)) = V, i(P(c,c)) = V

Contramodelo

Buscamos un **ContraModelo**, una interpretación que haga falsa la fórmula:

$i(\exists x \neg Q(f(x)) \land \neg \exists z(\forall y P(z,y) \rightarrow Q(f(z)))) = F$

sii

$i(\exists x \neg Q(f(x))) = F$ o bien $i(\neg \exists z(\forall y P(z,y) \rightarrow Q(f(z))))) = F$

$i(\exists z \neg Q(f(x))) = F$ sii

z=a $i(\neg Q(f(a))) = F$ sii $i(Q(f(a))) = V$

y

z=b $i(\neg Q(f(b))) = F$ sii $i(Q(f(v))) = V$

y

z=c $i(\neg Q(f(c))) = F$ sii $i(Q(f(c))) = V$

Contramodelo: **i(Q(f(a))) = V, i(Q(f(b))) = V, i(Q(f(c))) = V**

Sea L el lenguaje { R , a , b , c }, donde R(x,y) es un símbolo de predicado y a, b, c son constantes. Definir un contramodelo en un dominio de 3 elementos para demostrar lo siguiente:

$$\forall x \exists y\, R(x,f(y)) \not\models \exists y \forall x\, R(x,f(y))$$

Justificar adecuadamente la respuesta con un análisis semántico.

Examen julio 2015

$A \equiv \forall x \exists y\, R(x,f(y))$ $\qquad$ $B \equiv \exists y \forall x\, R(x,f(y))$

Hay que encontrar un contramodelo, es decir, una interpretación i tal que i(A) = V y i(B) = F

Probamos con dominio D = {a,b}, y f: D $\longrightarrow$ D la función identidad, f(x) = x $\forall$x

Hay que determinar R $\subset$ D x D.

$I(B) = F \longrightarrow \exists y \forall x\, R(x,f(y)) = F \longrightarrow \neg(\exists y \forall x\, R(x,f(y))) = V \longrightarrow \forall y \exists x\, R(x,f(y)) = F$

$\longrightarrow \forall y \exists x\, R(x,y) = F$

y = a $\quad \exists x\, R(x,a) = F \qquad R(b,a) = F$ por ejemplo (1)

y = b $\quad \exists x\, R(x,b) = F \qquad R(a,b) = F$ por ejemplo (2)

$i(A) = V \longrightarrow \forall x \exists y\, R(x,f(y)) = V \longrightarrow \forall x \exists y\, R(x,y) = V$

x = a $\quad \exists y\, R(a,y) = V$ teniendo en cuenta (2) $\quad R(a,a) = V$

x = b $\quad \exists y\, R(b,y) = V$ teniendo en cuenta (1) $\quad R(b,b) = V$

Queda por tanto : R = { (a,a), (b,b) }

Definir un contramodelo para demostrar que la siguiente relación de consecuencia lógica no se verifica:

$$\{ \ \forall x\,(P(x) \rightarrow R(x))\ ,\ \forall x\,(Q(x) \rightarrow R(x))\ ,\ P(a)\ ,\ Q(b)\ \} \ \models\ \exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$$

---

examen enero 2015

$$\{ \ \underbrace{\forall x\,(P(x) \rightarrow R(x))}_{A_1}\ ,\ \underbrace{\forall x\,(Q(x) \rightarrow R(x))}_{A_2}\ ,\ \underbrace{P(a)}_{A_3}\ ,\ \underbrace{Q(b)}_{A_4}\ \} \ \models\ \underbrace{\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))}_{B}$$

- Buscamos una interpretación i tal que

  $\forall x\,(P(x) \rightarrow R(x))$
  $\forall x\,(Q(x) \rightarrow R(x))$ son V y $\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$ es F
  $P(a)$
  $Q(b)$

- Tomamos como dominio D = {a,b}

  - $A_3 = V \longrightarrow \boxed{P(a)) = V}$
  - $A_4 = V \longrightarrow \boxed{Q(b)) = V}$
  - $A_1 \equiv \forall x\,(P(x) \rightarrow R(x)) = V$

    $$x = a \quad \left.\begin{array}{l} P(a) \rightarrow R(a) = V \\ P(a) = V \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{R(a) = V}$$

    $$x = b \quad P(b) \rightarrow R(b) = V \longrightarrow P(b) = F \text{ ó } R(b) = V \qquad (1)$$

  - $A_2 \equiv \forall x\,(Q(x) \rightarrow R(x)) = V$

    $x = a \quad Q(a) \rightarrow R(a) = V$ se cumple pues $R(a) = V$

    $$x = b \quad \left.\begin{array}{l} Q(b) \rightarrow R(b) = V \\ Q(b) = V \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{R(b) = V}$$

por tanto, (1) , A_1 es V para x = b, y por tanto A_1 es V

- $B \equiv \exists x\,(P(x) \wedge Q(x)) = F$ sii $\neg\exists x\,(P(x) \wedge Q(x)) = V$ sii $\forall x\,(\neg P(x) \vee \neg Q(x)) = V$

$x = a \quad \neg P(a) \vee \neg Q(a) = V \longrightarrow \neg Q(a) = V \longrightarrow \boxed{Q(a) = F}$

$P(a) = V \rightarrow \neg P(a) = F$

$x = b \quad \neg P(b) \vee \neg Q(b) = V \longrightarrow \neg P(b) = V \longrightarrow \boxed{P(b) = F}$

$Q(b) = V \rightarrow \neg Q(b) = F$

- Hemos encontrado un contramodelo: $P_D = \{a\}$ $Q_D = \{b\}$ $R_D = \{a,b\}$
  que además es el único contramodelo

Analizar si existe o no relación de consecuencia lógica en los siguientes esquemas de argumentación utilizando razonamiento semántico:

a) {∀z∃xP(x,z), ∃xP(x,a)} ⊨ ∃x∀zP(x,z)

b) {∀xP(x) → Q(c)} ⊨ ∃x(P(x) → Q(c))

Para comprobar si hay consecuencia lógica, comprobamos si existen contramodelos (que hagan verdaderas las premisas y falsa la conclusión) para cada una de las argumentaciones. Buscamos contramodelos con dominio D = {a,b,c}

a) {∀z∃xP(x,z), ∃xP(x,a)} ⊨ ∃x∀zP(x,z)

Premisas

∀z∃xP(x,z) = V

	z= a	∃xP(x,a) = V sii		
			x=a	**P(a,a)=V**
		o	x=b	P(b,a)=V
		o	x=c	P(c,a)=V
y	z= b	∃xP(x,b) = V sii		
			x=a	P(a,b)=V
		o	x=b	**P(b,b)=V**
		o	x=c	P(c,b)=V
y	z= c	∃xP(x,c) = V sii		
			x=a	P(a,c)=V
		o	x=b	P(b,c)=V
		o	x=c)	**P(c,c)=V**

y ∃xP(x,a) = V

x=a **P(a,a)=V**

o x=b $P(b,a)=V$

o x=c $P(c,a)=V$

Conclusión

$\exists x \forall z P(x,z) = F$

x=a $\forall z P(a,z) = F$ sii

z=a $P(a,a)=F$

ó z=b **$P(a,b)=F$**

ó z=c $P(a,c)=F$

y x=b $\forall z P(b,z) = F$ sii

z=a **$P(b,a)=F$**

ó z=b $P(b,b)=F$

ó z=c $P(b,c)=F$

y x=c $\forall z P(c,z) = F$ sii

z=a **$P(c,a)=F$**

ó z=b $P(c,b)=F$

ó z=c $P(c,c)=F$

Existe al menos un contramodelo (P(a,a)=V y **P(b,b)=V** y **P(c,c)=V ; P(a,b)=F** y **P(b,a)=F y P(c,a)=F), luego no hay consecuencia lógica.**

b) $\{\forall x P(x) \rightarrow Q(c)\} \models \exists x(P(x) \rightarrow Q(c))$

Premisas

$\forall x P(x) \rightarrow Q(c) = V$ sii

$\forall x P(x) = F$ sii

x= a $P(a) = F$

o x= b $P(b) = F$

o x= c $P(c) = F$

o $Q(c)=V$

Conclusión

$\exists x(P(x) \rightarrow Q(c)) = F$ sii

x=a $P(a) \rightarrow Q(c) = F$ sii

$P(a)=V$ y $Q(c)=F$

y x=b $P(b) \rightarrow Q(c) = F$ sii

$P(b)=V$ y $Q(c)=F$

y x=c $P(c) \rightarrow Q(c) = F$ sii

$P(c)=V$ y $Q(c)=F$

Analizamos las opciones:

$Q(c)=V$ en la premisa es incompatible con $Q(c)=F$ que se tiene que cumplir en todas las opciones de la conclusión.

$P(a)=F$ en la premisa es incompatible con $P(a)=V$ que debe cumplirse en la primera alternativa de la conclusión. $P(b)=F$ en la premisa es incompatible con $P(b)=V$ que debe cumplirse en la segunda alternativa de la conclusión. $P(c)=F$ en la premisa es incompatible con $P(c)=V$ que debe cumplirse en la tercera alternativa de la conclusión.

No es posible encontrar un contramodelo que haga simultáneamente verdaderas las premisas y falsa la conclusión, luego existe consecuencia lógica.

Averiguar si la fórmula $Q(a,b) \vee Q(c,c)$ es o no consecuencia lógica de cada uno de los siguientes conjuntos:

1) $\{ \exists x\, P(x) \;,\; \forall y\, (P(y) \rightarrow Q(a,y)) \}$

2) $\{ \exists x\, P(x) \;,\; \forall y\, (P(y) \rightarrow Q(c,c)) \}$

eval enero 2016

1) Llamamos $A_1 \equiv \exists x\, P(x)$

$A_2 \equiv \forall y\, (P(y) \rightarrow Q(a,y))$

$B \equiv Q(a,b) \vee Q(c,c)$

- Buscamos un contramodelo, es decir i tal que $i(A_1) = i(A_2) = V$ y $i(B) = F$
- Tomamos como dominio $D = \{1,2,3\}$, por ejemplo
- $\boxed{i(a) = 1}$ $\boxed{i(b) = 2}$ $\boxed{i(c) = 3}$ por ejemplo
- $i(B) = i(Q(a,b) \vee Q(c,c)) = F$ $\quad$ $i(Q(a,b)) = i(Q(c,c)) = F$ $\quad$ $\boxed{Q_D(1,2) = Q_D(3,3) = F}$
- $i(A_2) = i(\forall y\, (P(y) \rightarrow Q(a,y))) = V$ sii

$i(P(a) \rightarrow Q(a,a)) = V$ sii $i(P(a))= F$ ó $i(Q(a,a)) = V$ (1)

y $i(P(b) \rightarrow Q(a,b)) = V$ sii $\boxed{i(P(b)) = F}$ ó $\cancel{i(Q(a,b)) = V}$

y $i(P(c) \rightarrow Q(a,c)) = V$ sii $i(P(c)) = F$ ó $i(Q(a,c)) = V$ (2)

- $i(A_1) = i(\exists x\, P(x)) = V$ sii $i(P(a)) = V$ ó $\cancel{i(P(b)) = V}$ ó $i(P(c)) = V$ (3)
- para hacer compatibles (1), (2) y (3) elegimos $\boxed{i(P(a)) = V}$ y $\boxed{i(Q(a,a)) = V}$
- los demás valores de $i(Q(x,y))$ pueden ser V o F $\Rightarrow$ hay unos cuantos contramodelos con ese dominio y las interpretaciones de a, b y c antes fijadas

$\Rightarrow$ se ha encontrado un contramodelo $\Rightarrow$ **NO es consecuencia lógica**

2) Sean $A_1 \equiv \exists x\, P(x)$

$A_2 \equiv \forall y\,(\,P(y) \rightarrow Q(c,c)\,)$

$B \equiv Q(a,b) \vee Q(c,c)$

- En este caso SÍ es consecuencia lógica:
- Una demostración con deducción natural es la siguiente:

1.-	$\exists x\, P(x)$	premisa
2.-	$\forall y\,(\,P(y) \rightarrow Q(c,c)\,)$	premisa
3.-	$P(d)$	elim 1, d constante temporal nueva
4.-	$P(d) \rightarrow Q(c,c)$	elim 3
5.-	$Q(c,c)$	modus ponens 3, 4
6.-	$Q(a,b) \vee Q(c,c)$	int $\vee$ 5

- por tanto $\{A_1, A_2\} \vdash B$

- y por el teorema de completud $\{A_1, A_2\} \models B$

- demostración semántica:

buscamos un contramodelo, i.e., i tal que $i(A_1) = i(A_2) = V$ y $i(B) = F$

$i(B) = F \quad i(\,Q(a,b) \vee Q(c,c)\,) = F \qquad \boxed{Q_I(a,b) = Q_I(c,c) = F}$

$i(A_2) = V \quad i(\,\forall y\,(\,P(y) \rightarrow Q(c,c)\,)\,) = V$

$y = a \qquad i(\,P(a) \rightarrow Q(c,c)\,) = V$

$y = b \qquad i(\,P(b) \rightarrow Q(c,c)\,) = V$

$y = c \qquad i(\,P(c) \rightarrow Q(c,c)\,) = V$

como $Q_I(c,c)\,) = F \qquad \boxed{P_I(a) = P_I(b) = P_I(c) = F} \qquad (1)$

$i(A_3) = V \quad i(\,\exists x\, P(x)\,) = V$ que no es compatible con (1)

$\Rightarrow$ No hay contramodelo $\Rightarrow$ **SÍ es consecuencia lógica**.

Probar: $\exists x\, P(x) \rightarrow Q(a) \models \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(a))$

$$\underset{A}{\exists x\, P(x) \rightarrow Q(a)} \quad \models \quad \underset{B}{\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(a))}$$

1) Forma indirecta: buscamos interpretación I tal que $I(A) = V$ y $I(B) = F$

$I(B) = F$ $\quad I(\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(a))) = F$ sii $I(P(i) \rightarrow Q(a)) = F$ para algún $i \in L(D)$

sii $I(P(i)) = V$ para algún $i \in L(D)$ y $I(Q(a)) = F$

sii $\exists x\, P(x)$ y $I(Q(a)) = F$ $\Rightarrow$ $i(A) = F$

$\Rightarrow$ No es posible encontrar un contramodelo $\Rightarrow$ SÍ es consecuencia lógica

2) Directamente: sea I interpretación cualquiera tal que $I(A)= V$; hay que probar $I(B)=V$

$I(A) = I(\exists x\, P(x) \rightarrow Q(a)) = V$ $\quad I(\exists x\, P(x)) = F$ ó $I(Q(a)) = V$

1er caso: $I(\exists x\, P(x)) = F$ $\quad I(\neg\exists x\, P(x)) = V$ $\quad I(\forall x\, \neg P(x)) = V$

$I(\neg P(i)) = V$ para todo $i \in (D)$ $\quad I(P(i)) = F$ para todo $i \in (D)$

$I(P(i) \rightarrow Q(a)) = V$ para todo $i \in (D)$ $\quad I(B) = V$

2º caso: $I(Q(a)) = V$ $\quad I(P(i) \rightarrow Q(a)) = V$ para todo $i \in (D)$ $\quad I(B) = V$