Lógica Curso 2017-18 Deducción natural en LPO

Ejercicios resueltos - Enunciados

1. Demostrar con el cálculo **deducción natural**:

   $T\ [\ \forall x \forall y\ (P(a,x) \to Q(y)),\ \exists x\ \neg R(x)\ ] \models P(a,a) \to \exists x\ (Q(x) \land \neg R(x))$

   eval LPO 16-17

2. Demostrar mediante deducción natural, justificando cada paso y utilizando como mucho dos reglas derivadas en dos pasos de la demostración:

   $T\ [\ \forall x \forall y\ (P(y) \to Q(y,x))\ ,\ \neg \exists y\ (R(a,y) \land Q(b,y))\ ,\ \exists z\ R(a,z)\ ]\ \vdash \neg P(b)$

   examen julio 2017

3. Demostrar la siguiente deducción con el cálculo de deducción natural, usando solamente reglas básicas y la regla de corte:

   $T\ [\ \exists x(P(x) \land R(x))\ ,\ \forall z\ (P(z) \to Q(z) \lor S(z))\ ,\ \forall y\ \neg (R(y) \land Q(y))\ ]\ \models\ \exists x\ S(x)$

   repesca LPO enero 2017

4. Demostrar la fórmula $\exists x\ (q(x) \to p(f(a),x))$ a partir del conjunto de premisas

   $\{\ \forall x\ (\neg\ q(x) \lor r(x))\ ,\ \ \forall x\ \exists z\ (\neg\ p(x,z) \to \neg\ r(z))\ \}$

   examen julio 2015

5. Demostrar mediante deducción natural la corrección del siguiente argumento (se pueden usar las reglas derivadas):

   $T\ [\ \neg \forall x\ P(x,x)\ ]\ \models\ \exists y\ (P(a,y) \to \forall x\ P(x,x)) \to \exists y\ \neg P(a,y)$

   examen enero 2012

6. Demostrar la corrección de la siguiente estructura deductiva mediante deducción natural:

   $T[\neg \forall x(P(x) \land Q(x))] \vdash \exists x \neg P(x) \lor \exists y \neg Q(y)$

7. $\exists x\ \exists y\ (\ R(x,y) \lor R(y,x)\ )\ ,\ \neg \exists x\ R(x,x)\ \models\ \exists x\ \exists y\ \neg (x = y)$

Demostrar con el cálculo **deducción natural**:

T [∀x∀y (P(a,x) → Q(y)), ∃x ¬R(x)] |— P(a,a) → ∃x (Q(x) ∧ ¬R(x))

eval LPO 16-17

1. ∀x∀y (P(a,x) → Q(y)) premisa
2. ∃x ¬R(x) premisa
3. ¬R(b*) $E_{\exists 2}$
4. ∀y (P(a,a) → Q(y)) $E_{\forall 1\ \{x/a\}}$
5. P(a,a) → Q(b*) $E_{\forall 4\ \{y/b^*\}}$
6. P(a,a) supuesto
7. Q(b*) $E_{\rightarrow 5,6}$
8. Q(b*)∧¬R(b*) $I_{\wedge 11,12}$
9. ∃x (Q(x) ∧ ¬R(x)) $I_{\exists 8}$
10. P(a,a) → ∃x (Q(x) ∧ ¬R(x)) $E_{\rightarrow 6,9}$

Demostrar mediante deducción natural, justificando cada paso y <u>utilizando como mucho dos reglas derivadas en dos pasos de la demostración:</u>

$$T\ [\ \forall x \forall y\ (P(y) \rightarrow Q(y,x))\ ,\ \neg\exists y\ (R(a,y) \wedge Q(b,y))\ ,\ \exists z\ R(a, z)\ ]\ \vdash \neg P(b)$$

Examen julio 2017

1.	$\forall x \forall y(P(y) \rightarrow Q(y,x))$	premisa
2.	$\neg\exists y(R(a,y) \wedge Q(b,y))$	premisa
3.	$\exists zR(a, z)$	premisa
4.	$R(a,c^*)$	elim. ∃, 3 {z/c*}
5.	$\forall y \neg (R(a,y) \wedge Q(b,y))$	regla derivada 1 en línea 2: $\neg\exists xA(x) \rightarrow \forall x\neg A(x)$
6.	$\neg (R(a, c^*) \wedge Q(b, c^*))$	elim ∀, 5 {y/c*}
7.	$Q(b, c^*)$	supuesto
8.	$R(a,c^*) \wedge Q(b, c^*)$	int ∧ (4,7)
9.	$(R(a,c^*) \wedge Q(b, c^*)) \wedge \neg (R(a, c^*) \wedge Q(b, c^*))$	int ∧ (8,6)
10.	$Q(b, c^*) \rightarrow (R(a,c^*) \wedge Q(b, c^*)) \wedge \neg (R(a, c^*) \wedge Q(b, c^*))$	int → (7, 10)
11.	$\neg Q(b, c^*)$	int ¬ (10)
12.	$\forall y(P(y) \rightarrow Q(y, c^*))$	elim ∀, 1 {x/ c*}
13.	$P(b) \rightarrow Q(b, c^*)$	elim ∀, 12 {y/ b}
14.	$\neg P(b)$	regla derivada 2 en líneas 13 y 11: MT (13, 11)

Demostrar la siguiente deducción con el cálculo de deducción natural, **usando solamente reglas básicas y la regla de corte**:

$T [\ \exists x(P(x) \land R(x))\ ,\ \forall z\ (P(z) \rightarrow Q(z) \lor S(z))\ ,\ \forall y\ \neg(R(y) \land Q(y))\ ] \quad \vdash \quad \exists x\ S(x)$

repesca LPO enero 2017

1.	$\exists x(P(x) \land R(x))$	premisa
2.	$\forall z\ (P(z) \rightarrow Q(z) \lor S(z))$	premisa
3.	$\forall y\ \neg(R(y) \land Q(y))$	premisa
4.	$P(a) \land R(a)$	elim $\exists$ 1
5.	$P(a) \rightarrow Q(a) \lor S(a)$	elim $\forall$ 2
6.	$P(a)$	elim $\land$ 4
7.	$Q(a) \lor S(a)$	modus ponens 6,5
8-	$\neg(R(a) \land Q(a))$	elim $\forall$ 3
9.	$\neg R(a) \lor \neg Q(a)$	th intercambio 8 con $\neg(A \land B) \equiv \neg A \lor \neg B$
10.	$R(a)$	elim $\land$ 4
11.	$\neg Q(a)$	corte 9,10
12.	$S(a)$	corte 7,11
13.	$\exists x\ S(x)$	intr $\exists$ 12

Demostrar la fórmula $\exists x\, (q(x) \rightarrow p(f(a),x))$ a partir del conjunto de premisas

$\{ \forall x\, (\neg q(x) \vee r(x)),\ \forall x\, \exists z\, (\neg p(x,z) \rightarrow \neg r(z)) \}$

examen julio 2015

1.	$\forall x\, \exists z\, (\neg p(x,z) \rightarrow \neg r(z))$	premisa
2.	$\exists z\, (\neg p(f(a),z) \rightarrow \neg r(z))$	elim $\forall$ 1 (*)
3.	$\neg p(f(a),c) \rightarrow \neg r(c)$	elim $\exists$ 2
4.	$\quad q(c)$	supuesto
5.	$\quad \forall x\, (\neg q(x) \vee r(x))$	premisa
6.	$\quad \neg q(c) \vee r(c)$	elim $\forall$ 5
7.	$\quad r(c)$	corte 4,6
8.	$\quad \neg\neg p(f(a),c)$	modus tollens 3,7
9.	$\quad p(f(a),c)$	elim $\neg$ 8
10.	$q(c) \rightarrow p(f(a),c)$	intr $\rightarrow$ 4,9
11.	$\exists x\, (q(x) \rightarrow p(f(a),x))$	intr $\exists$ 10

(*) puesto que en la fórmula que hay que demostrar aparece $p(f(a),x)$

Demostrar mediante deducción natural la corrección del siguiente argumento (se pueden usar las reglas derivadas):

$$T\ [\ \neg\forall x\ P(x,x)\ ]\ \vdash\ \exists y\ (P(a,y) \rightarrow \forall x\ P(x,x)) \rightarrow \exists y\ \neg P(a,y)$$

Examen enero 2012

1.	$\neg\forall x\ P(x,x)$	premisa
2.	$\quad\mid\ \exists y\ (P(a,y) \rightarrow \forall x\ P(x,x))$	supuesto
3.	$\quad\mid\ P(a,b) \rightarrow \forall x\ P(x,x)$	elim ∃ 2 ('b' constante nueva)
4.	$\quad\mid\ \neg P(a,b) \vee \forall x\ P(x,x)$	def → 3
5.	$\quad\mid\ \neg P(a,b)$	corte 1, 4
6.	$\quad\mid\ \exists y\ \neg P(a,y)$	int ∃ 5
7.	$\exists y\ (P(a,y) \rightarrow \forall x\ P(x,x)) \rightarrow \exists y\ \neg P(a,y)$	int → 2, 6

Demostrar la corrección de la estructura deductiva siguiente, mediante deducción natural:

$$T\ [\ \neg \forall x\ (P(x) \wedge Q(x))\ ] \vdash \exists x\ \neg P(x) \vee \exists y\ \neg Q(y)$$

1ª solución:

1.	$\neg \forall x\ (P(x) \wedge Q(x))$	premisa
2.	$\exists x\ \neg (P(x) \wedge Q(x))$	$\neg \forall x\ A(x) \equiv \exists x\ \neg A(x)$
3.	$\exists x\ (\neg P(x) \vee \neg Q(x))$	De Morgan 2
4.	$\neg P(a) \vee \neg Q(a)$	elim $\exists$ 3, a constante nueva
5.	$\quad \neg P(a)$	supuesto
6.	$\quad \exists x\ \neg P(x)$	int $\exists$ 5
7.	$\quad \exists x\ \neg P(x) \vee \exists y\ \neg Q(y)$	int $\vee$ 6
8.	$\quad \neg Q(a)$	supuesto
9.	$\quad \exists y\ \neg Q(y)$	int $\exists$ 8
10.	$\quad \exists x\ \neg P(x) \vee \exists y\ \neg Q(y)$	int $\vee$ 9
11.	$\exists x\ \neg P(x) \vee \exists y\ \neg Q(y)$	elim $\vee$ 4, 5-7, 8-10

2ª solución: por contradicción:

1.	$\neg \forall x\ (P(x) \wedge Q(x))$	premisa
2.	$\quad \neg(\exists x\ \neg P(x) \vee \exists y\ \neg Q(y))$	supuesto
3.	$\quad \neg \exists x\ \neg P(x) \wedge \neg \exists y\ \neg Q(y)$	De Morgan 2
4.	$\quad \forall x \neg\neg P(x) \wedge \forall y \neg\neg Q(y)$	$\neg \exists x\ A(x) \equiv \forall x\ \neg A(x)$
5.	$\quad \forall x\ P(x) \wedge \forall y\ Q(y)$	elim $\neg$ 4, dos veces
6.	$\quad \forall x\ P(x) \wedge \forall x\ Q(x)$	$\forall y\ Q(y) \equiv \forall x\ Q(x)$
7.	$\quad \forall x\ (P(x) \wedge Q(x))$	$\forall x\ P(x) \wedge \forall x\ Q(x) \equiv \forall x\ (P(x) \wedge Q(x))$
8.	$\quad \neg \forall x\ (P(x) \wedge Q(x))$	iteración 1
9.	$\neg\neg(\exists x\ \neg P(x) \vee \exists y\ \neg Q(y))$	int $\neg$ 2, 7, 8
10.	$\exists x\ \neg P(x) \vee \exists y\ \neg Q(y)$	elim $\neg$ 9

Probar con deducción natural

$$\exists x\, \exists y\, (\, R(x,y) \vee R(y,x)\,)\ ,\ \neg \exists x\, R(x,x) \ \vdash\ \exists x\, \exists y\, \neg (x = y)$$

1 -	$\exists x\, \exists y\, (\, R(x,y) \vee R(y,x)\,)$	premisa	
2 -	$\neg \exists x\, R(x,x)$	premisa	
3 -	$R(a,b) \vee R(b,a)$	elim $\exists$ 1, dos veces	
4 -	$\forall x\, \neg R(x,x)$	$\neg \exists x\, P(x) \equiv \forall x\, \neg P(x)$	
5 -	$\quad \vert\ a = b$	supuesto	
6 -	$\quad \vert\ \neg R(a,a)$	elim $\forall$ 4	
7 -	$\quad \vert\ \neg R(b,a)$	elim = 5,6	(*)
8 -	$\quad \vert\ R(a,b)$	corte 3,7	
9 -	$\quad \vert\ \neg R(a,b)$	elim = 5,6	(*)
10 -	$\neg (a = b)$	int $\neg$ 5, 8, 9	
11 -	$\exists y\, \neg (a = y)$	int $\exists$ 10	
12 -	$\exists x\, \exists y\, \neg (x = y)$	int $\exists$ 11	

(*) en los dos casos sólo se ha sustituido una de las dos constantes a’s que aparecen