Lógica Curso 2017-18 Resolución con unificación en LPO

Ejercicios resueltos - Enunciados

1. Demostrar que el siguiente conjunto de cláusulas es insatisfacible mediante resolución con umg, indicando en cada paso el unificador empleado:

C_1: $\neg P(y) \lor Q(z, h(z))$

C_2: $S(z, f(x), x) \lor \neg P(x)$

C_3: $P(a)$

C_4: $\neg R(x, h(y)) \lor \neg S(g(z), z, a)$

C_5: $\neg T(g(x)) \lor \neg R(x, h(x))$

C_6: $R(x, y) \lor \neg Q(z, y)$

examen enero 2015

2. Demostrar, mediante el método de resolución, que la siguiente estructura deductiva es correcta: $T[C1, C2, C3, C4\ C5] \vdash \exists x \forall y(P(x) \lor T(x,y))$

C_1: $Q(x) \lor R(x)$

C_2: $R(x) \lor P(x) \lor \neg Q(f(x))$

C_3: $R(x) \lor P(x) \lor T(x, y)$

C_4: $\neg R(x)$

C_5: $Q(a)$

Eval LPO 16-17

3. Demostrar, mediante el método de resolución, que la siguiente estructura deductiva es correcta:

$T[C_1, C_2, C_3, C_4] \vdash \exists x (\neg Q(x) \land \neg R(x))$

C_1: $R(x) \lor P(x) \lor S(x)$

C_2: $R(x) \lor P(x) \lor \neg Q(f(x))$

C_3: $\neg P(x)$

C_4: $\neg R(x)$

eval dicbre. 2015

4. Demostrar que el siguiente conjunto es insatisfacible utilizando el método de resolución con umg:

$$C1 : P(f(x)) \lor \neg Q(x) \lor R(x)$$

$$C2 : \neg P(f(x)) \lor S(g(y), y)$$

$$C3 : P(y) \lor R(y) \lor \neg S(y, g(y))$$

$$C4 : Q(x) \lor R(y)$$

$$C5 : \neg S(x, y)$$

$$C6 : \neg R(x)$$

repesca LPO enero 2016

5. Demostrar por Resolución con UMG que la fórmula $\neg E(s(a),s(s(a)))$ se deduce a partir del siguiente conjunto de cláusulas:

C1: $N(a)$

C2: $\neg N(x) \lor N(s(x))$

C3: $\neg N(x) \lor \neg E(a,s(x))$

C4: $\neg N(x) \lor \neg N(y) \lor \neg E(s(x),s(y)) \lor E(x,y)$

C5: $E(f(x,a),x)$

C6: $E(s(f(x,s(y))),f(s(x),s(y)))$

examen julio 2016

6. Dado el conjunto de cláusulas:

C1: $\neg B(x) \lor M(x)$	C5: $A(f(x),x)$
C2: $\neg M(x) \lor E(b,x) \lor A(b,x)$	C6: $D(a,b)$
C3: $\neg M(x) \lor \neg A(x,x)$	C7: $B(a)$
C4: $\neg D(x,y) \lor \neg A(y,x)$	C8: $\neg E(b,a)$

Demostrar que dicho conjunto es insatisfacible mediante resolución con UMG, indicando en cada paso el unificador empleado.

examen enero 2011

7. Dado el siguiente conjunto de cláusulas:

   C1: $\neg$ t(y)

   C2: p(x) $\vee$ t(x) $\vee$ $\neg$ r(x; g(x))

   C3: r(h(z); z) $\vee$ $\neg$ p(h(z))

   C4: t(y) $\vee$ $\neg$ q(g(y)) $\vee$ p(y)

   C5: $\neg$ r(x; y)

   C6: q(x) $\vee$ t(x)

   a) probar que es insatisfacible por resolución input lineal con umg.

   b) elegir {C2,C3,C4,C5,C6} como conjunto soporte, ¿garantiza que existe una resolución dirigida? Decir por qué.

8. Dado el siguiente conjunto de cláusulas:

   C1 : $\neg$P(x) $\vee$ Q(x) $\vee$ $\neg$R(x, y)

   C2 : $\neg$D(x) $\vee$ $\neg$Q(y) $\vee$ $\neg$R(x, y)

   C3 : $\neg$D(x) $\vee$ P(x)

   C4 : D(f(x))

   C5 : D(a)

   C6 : R(x, f(x))

   (a) Demostrar que es insatisfacible usando resolución.

   (b) La refutación que se ha obtenido ¿es lineal? ¿es input? (c) ¿Qué condición la haría dirigida? Justificar las respuestas.

9. Dado el conjunto de cláusulas:

C1: A(x) $\vee$ $\neg$B(g(x)) $\vee$ C(x)	C4: C(x) $\vee$ $\neg$D(x,y)
C2: $\neg$C(x)	C5: B(x) $\vee$ C(x)
C3: A(x) $\vee$ C(x) $\vee$ $\neg$D(x,g(x))	C6: $\neg$A(f(x)) $\vee$ D(f(x),x)

   a) Demostrar que dicho conjunto es insatisfacible mediante resolución con UMG, indicando en cada paso el unificador empleado.
   b) La refutación obtenida ¿es lineal?, ¿es input?. Justificar la respuesta.
   c) Definir un conjunto soporte, con más de una cláusula, para que la refutación anterior sea dirigida. Justificar la respuesta.
   d) El conjunto soporte anterior, ¿cumple la condición de completud?, ¿por qué?

examen junio 2011

Demostrar que el siguiente conjunto de cláusulas es insatisfacible mediante resolución con umg, indicando en cada paso el unificador empleado:

C_1: $\neg P(y) \vee Q(z, h(z))$

C_2: $S(z, f(x), x) \vee \neg P(x)$

C_3: $P(a)$

C_4: $\neg R(x, h(y)) \vee \neg S(g(z), z, a)$

C_5: $\neg T(g(x)) \vee \neg R(x, h(x))$

C_6: $R(x, y) \vee \neg Q(z, y)$

Renombramos las variables de las clausulas:

C_1: $\neg P(x_1) \vee Q(y_1, h(y_1))$

C_2: $S(u_1, f(x_2), x_2) \vee \neg P(x_2)$

C_3: $P(a)$

C_4: $\neg R(x_3, h(y_2)) \vee \neg S(g(z_1), z_1, a)$

C_5: $\neg T(g(x_4)) \vee \neg R(x_4, h(x_4))$

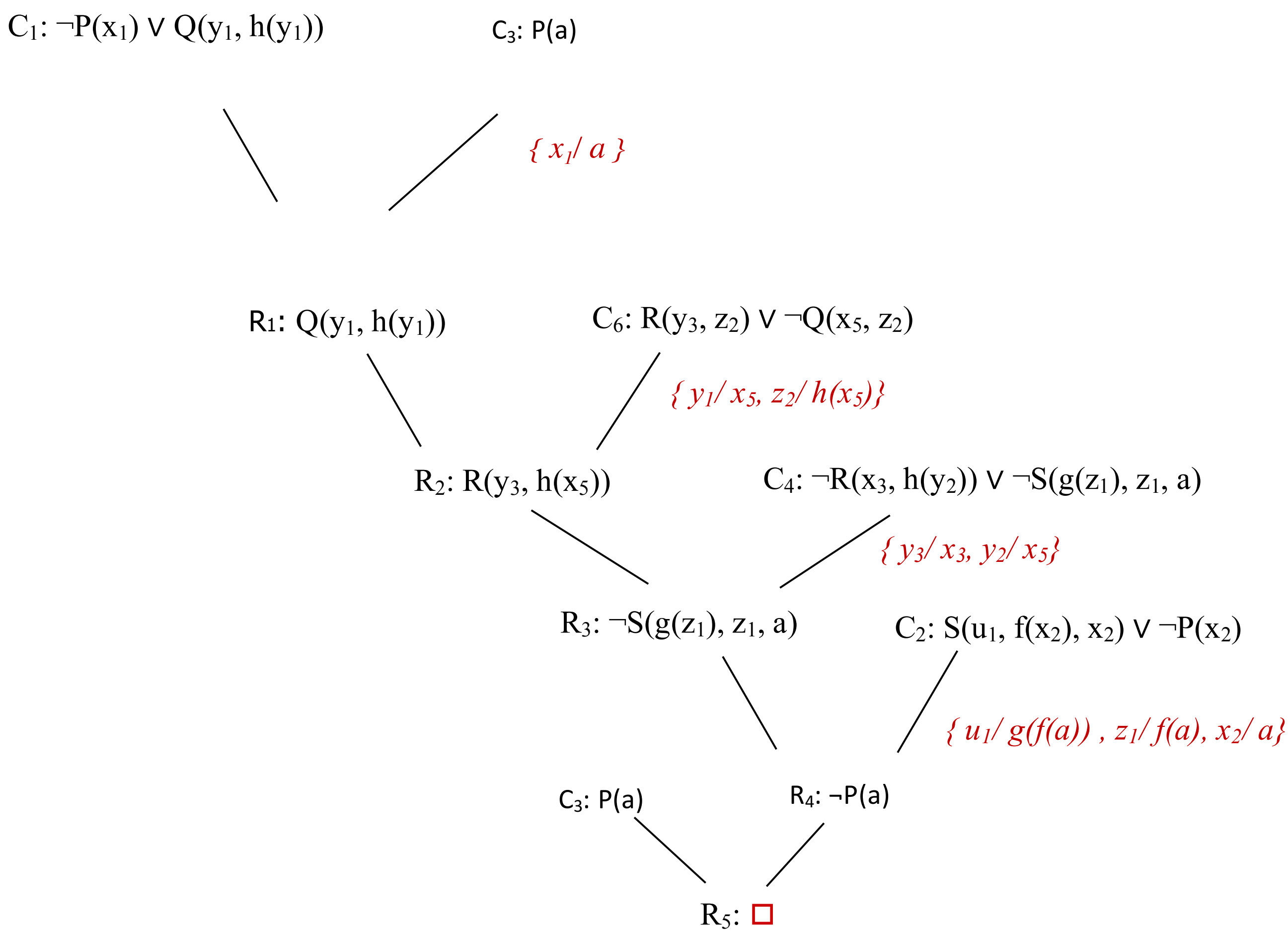
C_6: $R(y_3, z_2) \vee \neg Q(x_5, z_2)$

Podemos eliminar la cláusula 5 ya que el predicado T no aparece en ninguna otra cláusula.

Una posible derivación que nos permite llegar a la cláusula vacía es la siguiente:

R_1: $Q(y_1, h(y_1))$	C_1 con C_3:	$\{x_1/ a\}$
R_2: $R(y_3, h(x_5))$	R_1 con C_6:	$\{ y_1/ x_5, z_2/ h(x_5)\}$
R_3: $\neg S(g(z_1), z_1, a)$	R_2 con C_4:	$\{ y_3/ x_3, y_2/ x_5\}$
R_4: $\neg P(a)$	R_3 con C_2:	$\{ u_1/ g(f(a)) , z_1/ f(a), x_2/ a\}$
R_5: $\square$	R_4 con C_3:	

En forma de árbol:



La resolución obtenida sigue una estrategia lineal. Además es una estrategia input y también es dirigida.

Demostrar, mediante el método de resolución, que la siguiente estructura deductiva es correcta:

$$T[\, C_1, C_2, C_3, C_4\, C_5] \quad |\!\!— \quad \exists x \forall y (P(x) \vee T(x,y))$$

C_1: $Q(x) \vee R(x)$

C_2: $R(x) \vee P(x) \vee \neg Q(f(x))$

C_3: $R(x) \vee P(x) \vee T(x, y)$

C_4: $\neg R(x)$

C_5: $Q(a)$

Se renombran las variables:

C_1: $Q(x_1) \vee R(x_1)$

C_2: $R(x_2) \vee P(x_2) \vee \neg Q(f(x_2))$

C_3: $R(x_3) \vee P(x_3) \vee T(x_3, x_3)$

C_4: $\neg R(x_4)$

C_5: $Q(a)$

Se hace la forma clausular de la negación de la conclusión

C_6: $\neg P(x_5)$

C_7: $\neg T(x_6, f(x_6))$

Para que el conjunto sea insatisfacible debe existir una derivación que permita llegar a la cláusula vacía:

C_2: $R(x_2) \vee P(x_2) \vee \neg Q(f(x_2))$ $\quad$ C_6: $\neg P(x_5)$

$\{x_2/x_5\}$

R_1: $R(x_5) \vee \neg Q(f(x_5))$ $\quad$ C_4: $\neg R(x_4)$

$\{ x_5/x_4\}$

R_2: $\neg Q(f(x_4))$ $\quad$ C_1: $Q(x_1) \vee R(x_1)$

$\{ x_1/f(x_4)\}$

R_3: $R(f(x_4))$ $\quad$ C'_4: $\neg R(x_7)$

$\{ x_7/f(x_4)\}$

R_4: $\square$

Demostrar, mediante el método de resolución, que la siguiente estructura deductiva es correcta:

$$T[C_1, C_2, C_3, C_4] \quad \vdash \quad \exists x\, (\neg Q(x) \wedge \neg R(x))$$

C_1: $R(x) \vee P(x) \vee S(x)$

C_2: $R(x) \vee P(x) \vee \neg Q(f(x))$

C_3: $\neg P(x)$

C_4: $\neg R(x)$

Se renombran las variables:

C_1: $R(x_1) \vee P(x_1) \vee S(x_1)$
C_2: $R(x_2) \vee P(x_2) \vee \neg Q(f(x_2))$
C_3: $\neg P(x_3)$
C_4: $\neg R(x_4)$

Se hace la forma clausular de la negación de la conclusión
C_5: $Q(x_5) \vee R(x_5)$

La cláusula C_1 se puede simplificar al ser $S(x_1)$ un literal puro.

Para que el conjunto sea insatisfacible debe existir una derivación que permita llegar a la cláusula vacía:

C_2: $R(x_2) \vee P(x_2) \vee \neg Q(f(x_2))$ $\qquad$ C_3: $\neg P(x_3)$

$\{x_2/x_3\}$

R_1: $R(x_3) \vee \neg Q(f(x_3))$ $\qquad$ C_4: $\neg R(x_4)$

$\{x_3/x_4\}$

R_2: $\neg Q(f(x_4))$ $\qquad$ C_5: $Q(x_5) \vee R(x_5)$

$\{x_5/f(x_4)\}$

R_3: $R(f(x_4))$ $\qquad$ C'_4: $\neg R(x_6)$

$\{x_6/f(x_4)\}$

R_4: $\square$

Hemos encontrado la cláusula vacía $\square$, luego el conjunto de cláusulas es insatisfacible. La estructura deductiva es correcta.

Demostrar que el siguiente conjunto es insatisfacible utilizando el método de **resolución con umg**:

C1 : P(f(x)) ∨ ¬Q(x) ∨ R(x)

C2 : ¬P(f(x)) ∨ S(g(y), y)

C3 : P(y) ∨ R(y) ∨ ¬S(y, g(y))

C4 : Q(x) ∨ R(y)

C5 : ¬S(x, y)

C6 : ¬R(x)

Renombrado de variables:

C1 : P(f(x1)) ∨ ¬Q(x1) ∨ R(x1)

C2 : ¬P(f(x2)) ∨ S(g(y2), y2)

C3 : P(y3) ∨ R(y3) ∨ ¬S(y3, g(y3))

C4 : Q(x4) ∨ R(y4)

C5 : ¬S(x5, y5)

C6 : ¬R(x6)

Resolución:

R1: P(f(x1)) ∨ ¬Q(x1)	C1,C6 {x6/x1}
R2: Q(x4)	C4,C6’ {x6’/y4}, siendo C6’: ¬r(x6’)
R3: P(f(x1))	R1,R2 {x4/x1}
R4: S(g(y2),y2)	R3,C2 {x2/x1}
R5: □	R4,C5 {x5/g(y2), y5/y2}

(C6 se usa dos veces con su correspondiente renombrado y C3 no se usa)

Demostrar por Resolución con UMG que la fórmula ¬E(s(a),s(s(a))) se deduce a partir del siguiente conjunto de cláusulas:

C1: N(a)

C2: ¬N(x) ∨ N(s(x))

C3: ¬N(x) ∨ ¬E(a,s(x))

C4: ¬N(x) ∨ ¬N(y) ∨ ¬E(s(x),s(y)) ∨ E(x,y)

C5: E(f(x,a),x)

C6: E(s(f(x,s(y))),f(s(x),s(y))

Se trata de algunos de los axiomas de la aritmética de Peano, donde la constante a representa el número 0, la función s representa el "sucesor", la función f representa la suma, el predicado N representa el concepto de "ser un número natural", y el predicado E representa la igualdad.

La afirmación que se pide demostrar es que 1 no es igual a 2.

Negando la conclusión se obtiene una nueva cláusula

C0: E(s(a),s(s(a)))

A continuación se renombran todas las variables para evitar, en la medida de lo posible, problemas con la resolución.

C1: N(a)

C2: ¬N(x2)vN(s(x2))

C3: ¬N(x3)v¬E(a,s(x3))

C4: ¬N(x4)v¬N(y4)v¬E(s(x4),s(y4))vE(x4,y4)

C5: E(f(x5,a),x5)

C6: E(s(f(x6,s(y6))),f(s(x6),s(y6))

La refutación es la siguiente:

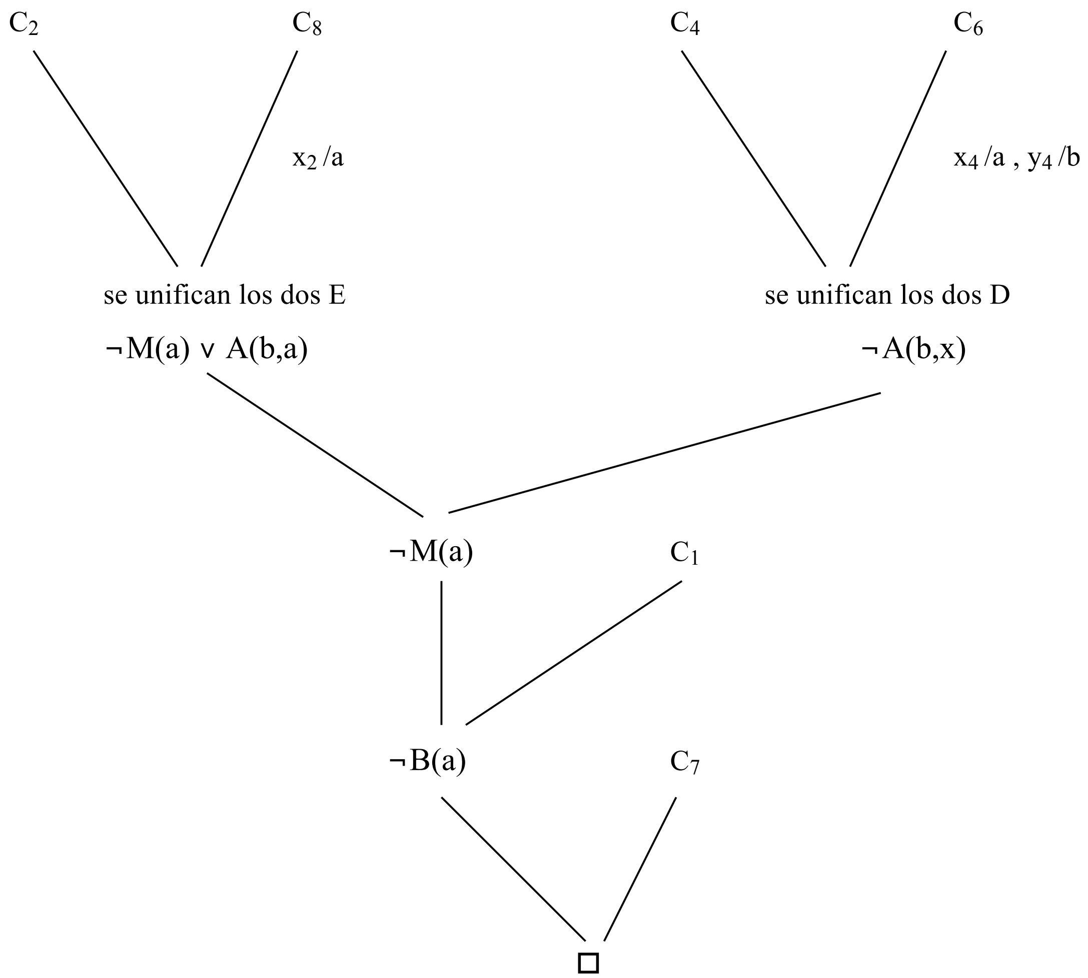
C7: ¬N(a)v¬N(s(a))vE(a,s(a)) (C0,C4) { x4/a, y4/s(a) }

C8:	¬N(s(a))vE(a,s(a))	(C7,C1)	{ }
C9:	¬N(a)vE(a,s(a))	(C8,C2)	{ x2/a }
C10:	E(a,s(a))	(C9,C1)	{ }
C11:	¬N(a)	(C10,C3)	{ x3/a }
C12:	□	(C11,C1)	{ }

Dado el conjunto de cláusulas:

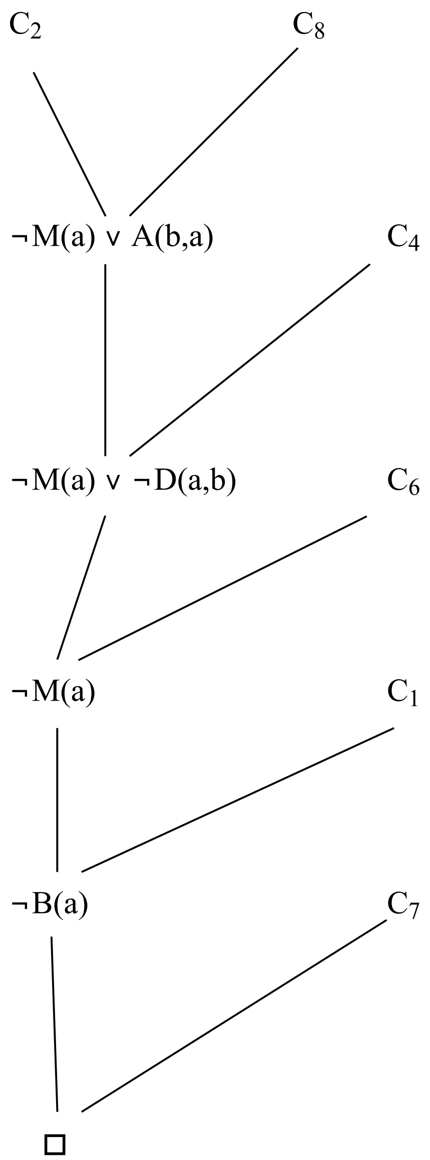
C1: ¬B(x) ∨ M(x)	C5: A(f(x),x)
C2: ¬M(x) ∨ E(b,x) ∨ A(b,x)	C6: D(a,b)
C3: ¬M(x) ∨ ¬A(x,x)	C7: B(a)
C4: ¬D(x,y) ∨ ¬A(y,x)	C8: ¬E(b,a)

Demostrar que dicho conjunto es insatisfacible mediante resolución con UMG, indicando en cada paso el unificador empleado.

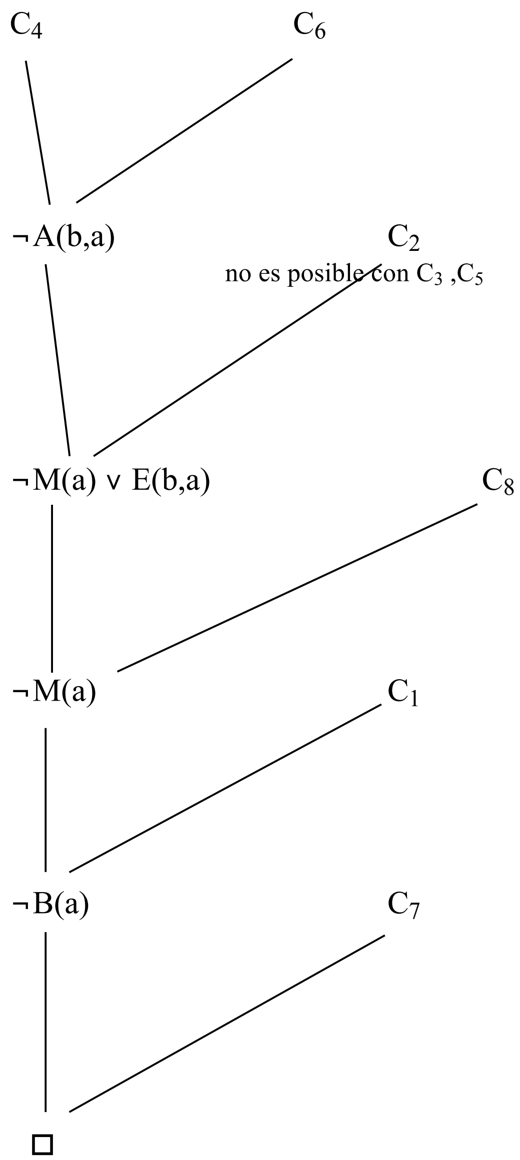


Otras soluciones con resolución lineal:

… // …



C_2
C_8
$\neg M(a) \vee A(b,a)$
C_4
$\neg M(a) \vee \neg D(a,b)$
C_6
$\neg M(a)$
C_1
$\neg B(a)$
C_7
$\square$



C_4
C_6
$\neg A(b,a)$
C_2
no es posible con C_3 ,C_5
$\neg M(a) \vee E(b,a)$
C_8
$\neg M(a)$
C_1
$\neg B(a)$
C_7
$\square$

Dado el siguiente conjunto de cláusulas:

C_1: $\neg\, t(y)$

C_2: $p(x) \vee t(x) \vee \neg\, r(x, g(x))$

C_3: $r(h(z), z) \vee \neg\, p(h(z))$

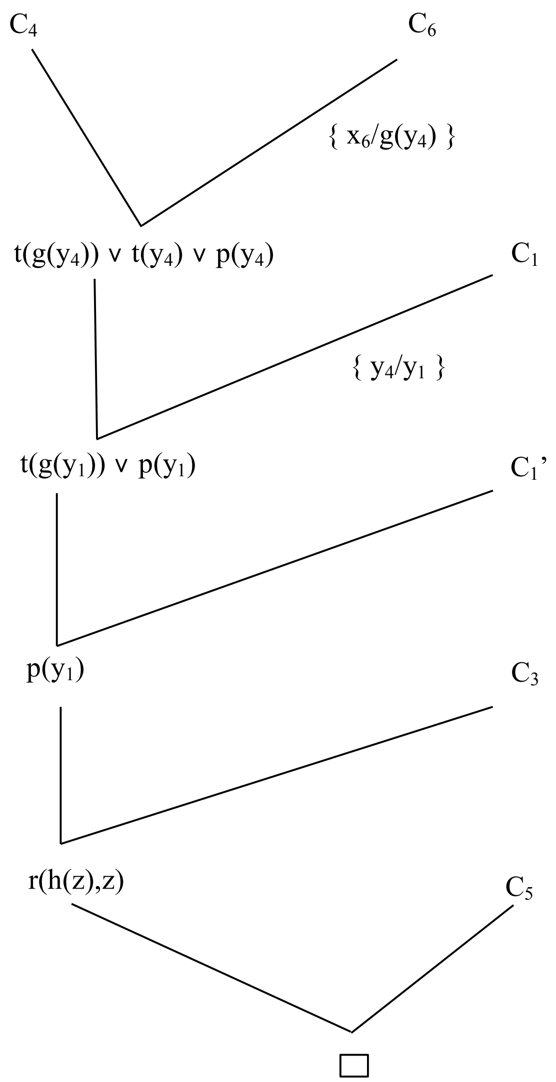
C_4: $t(y) \vee \neg\, q(g(y)) \vee p(y)$

C_5: $\neg\, r(x,y)$

C_6: $q(x) \vee t(x)$

a) probar que es insatisfacible por resolución input lineal con umg.

b) elegir $\{C_2,C_3,C_4,C_5,C_6\}$ como conjunto soporte, ¿garantiza que existe una resolución dirigida? Decir por qué.



No se ha utilizado C_2.

- Es lineal
- Es input: siempre se utiliza una clausula de $\{C_1 \ldots C_6\}$

b) Sí, puesto que $\{C_2,C_3,C_4,C_5,C_6\}$ es satisfacible :

- interpretaciones que hacen verdaderas estas 5 cláusulas:

  D dominio cualquiera ,

  $t_D(x) = V$ para todo $x \in D$ $\longrightarrow$ hace V las cláusulas C_2 , C_4 y C_6

  $r_D(x,y) = V$ para todo $x,y \in D$ $\longrightarrow$ hace V la cláusula C_5

  $p_D(x) = V$ para todo $x \in D$ $\longrightarrow$ hace V la cláusula C_4

  q_D cualquiera

Otra solución:

$R_1 = (C_3, C5) = \neg p(h(z))$	$x_5/h(z), y_5/z$	
$R_2 = (R_1, C_4) = b(h(z)) \vee \neg q(g(h(z)))$	$y_4/h(z)$	
$R_3 = (R_2, C_1) = \neg q(g(h(z)))$	$x_1/h(z)$	
$R_4 = (R_3, C_6) = t(g(h(z)))$	$x_6/g(h(z))$	No se utiliza C_2
$R_5 = \square = (R_4, C_1)$		

$\{C_2,C_3,C_4,C_5,C_6\}$ también es satisfacible

Otra solución dirigida:

$R1 \equiv (C1, C6) \equiv q(x_6)$	y_1 / x_6
$R2 \equiv (R1, C4) \equiv t(y_4) \vee p(y_4)$	$x_6 / g(y_4)$
$R3 \equiv (R2, C1) \equiv p(y_4)$	y_1 / y_4
$R4 \equiv (R3, C3) \equiv r(h(z_3), z_3)$	$y_4 / h(z_3)$
$R5 \equiv (R4, C5) \equiv \square$	

Dado el siguiente conjunto de cláusulas:

$C_1 :\ \neg P(x) \vee Q(x) \vee \neg R(x, y)$

$C_2 :\ \neg D(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg R(x, y)$

$C_3 :\ \neg D(x) \vee P(x)$

$C_4 :\ D(f(x))$

$C_5 :\ D(a)$

$C_6 :\ R(x, f(x))$

(a) Demostrar que es insatisfacible usando resolución.

(b) La refutación que se ha obtenido ¿es lineal? ¿es input?

(c) ¿Qué condición la haría dirigida? Justificar las respuestas.

- 1er intento:

$R_1 \equiv (C_1,C_2)$ unificando átomos con el predicado Q :

$\equiv\ \neg P(x_1) \vee \neg R(x_1, y_1) \vee \neg D(x_2) \vee \neg R(x_2, x_1) \qquad y_2/x_1$

factorizando $R(x_1, y_1)$ y $R(x_2, x_1)$:

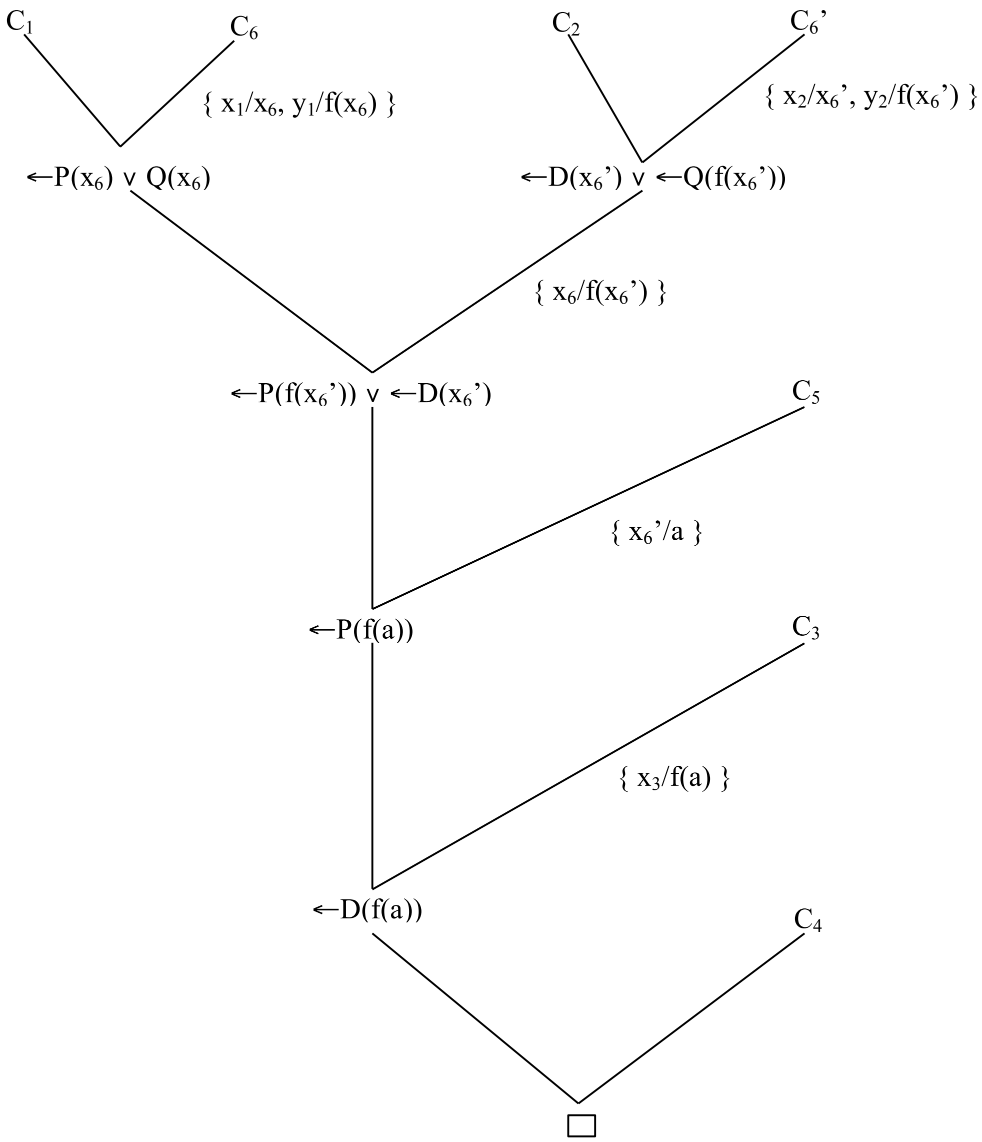
$$\begin{array}{ccccc} R(x_1, y_1) & & R(x_2, y_1) & & \\ & x_1/x_2 & & y_1/x_2 \longrightarrow & R(x_2, x_2) \\ R(x_2, x_1) & & R(x_2, x_2) & & \end{array}$$

$\equiv\ \neg P(x_2) \vee \neg D(x_2) \vee \neg R(x_2, x_2)$

que no se puede unificar con C_6 : $R(x, f(x))$

- idea: C_1 C_6 C_2 C_6'

…/…


C_1
C_6
$\{ x_1/x_6, y_1/f(x_6) \}$
C_2
C_6'
$\{ x_2/x_6', y_2/f(x_6') \}$
$\leftarrow P(x_6) \vee Q(x_6)$
$\leftarrow D(x_6') \vee \leftarrow Q(f(x_6'))$
$\{ x_6/f(x_6') \}$
$\leftarrow P(f(x_6')) \vee \leftarrow D(x_6')$
C_5
$\{ x_6'/a \}$
$\leftarrow P(f(a))$
C_3
$\{ x_3/f(a) \}$
$\leftarrow D(f(a))$
C_4
$\square$

Dado el conjunto de cláusulas:

C_1: A(x) ∨ ¬B(g(x)) ∨ C(x) C_4: C(x) ∨ ¬D(x,y)

C_2: ¬C(x) C_5: B(x) ∨ C(x)

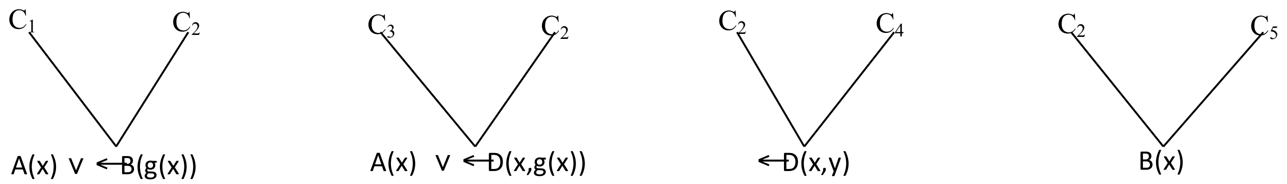
C_3: A(x) ∨ C(x) ∨ ¬D(x,g(x)) C_6: ¬A(f(x)) ∨ D(f(x),x)

a) Demostrar que dicho conjunto es insatisfacible mediante resolución con UMG, indicando en cada paso el unificador empleado.
b) La refutación obtenida ¿es lineal?, ¿es input?. Justificar la respuesta.
c) Definir un conjunto soporte, con más de una cláusula, para que la refutación anterior sea dirigida. Justificar la respuesta.

El conjunto soporte anterior, ¿cumple la condición de completud?, ¿por qué?.

---

*) Se quita C(x) de todas las clausulas, utilizando C_2 :



*) ¬D(x,g(x)) y D(f(x),x) no son unificables:

$D(x_1, g(x_1))$ $\{ x_1/f(x_2)\}$ $D(f(x_2), g(f(x_2)))$

$D(f(x_2),x_2)$ $D(f(x_2), x_2)$

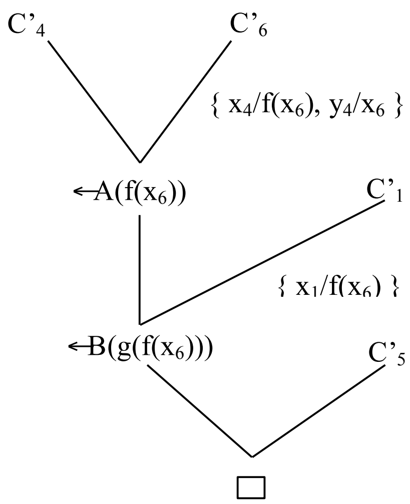
C_3 se puede eliminar pero D(f(x),x) y ¬D(x,y) sí son unificables.

*) C'$_1$: A(x) ∨ ¬B(g(x))

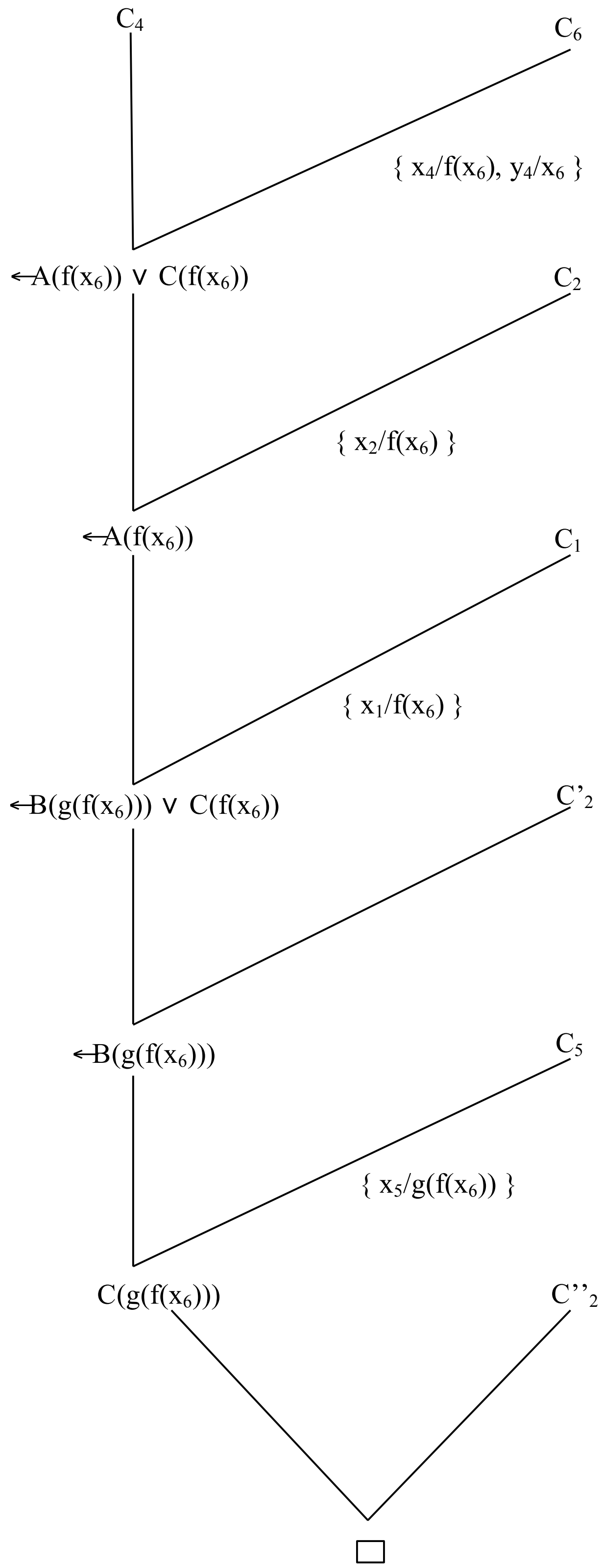
C'$_4$: ¬D(x,y)

C'$_5$: B(x)

C'$_6$: ¬A(f(x)) ∨ D(f(x),x)



*) No es input, ni lineal PERO es fácil ir eliminando C(x) a medida que aparece:



Que es lineal e input.

Dirigida: S cualquier subconjunto de $\{C_1, \dots , C_6\}$ que no contenga simultáneamente C_4 y C_6 (puede incluir C_3).