Lógica Curso 2016-17 Deducción natural en LPO

Ejercicios resueltos - Enunciados

1. Demostrar la siguiente deducción con el cálculo de deducción natural, justificando cada paso adecuadamente:

   $$T\ [\ \forall x \exists y\ r(x,f(y)) \vee \neg \exists z\ p(z)\ ,\ \exists x \forall z\ (r(x,f(z)) \rightarrow q(z))\ ]\ \vdash\ p(b) \rightarrow \exists x\ q(x)$$

2. Demostrar la corrección de la siguiente estructura deductiva mediante deducción natural:

   $$\{\ \exists x \forall y (P(y) \rightarrow Q(x))\ \}\ \vdash\ \exists y P(y) \rightarrow \exists x Q(x)$$

3. Demostrar mediante deducción natural la corrección del siguiente argumento (se pueden usar las reglas derivadas):

   $$T\ [\ \neg \forall x\ P(x,x)\ ]\ \vdash\ \exists y\ (P(a,y) \rightarrow \forall x\ P(x,x)) \rightarrow \exists y\ \neg P(a,y)$$

4. Demostrar la fórmula $\exists x\ (q(x) \rightarrow p(f(a),x))$ a partir del conjunto de premisas

   $$\{\ \forall x\ (\neg\ q(x) \vee r(x))\ ,\ \forall x\ \exists z\ (\neg\ p(x,z) \rightarrow \neg\ r(z))\ \}$$

5. Demostrar la corrección de las siguientes estructuras deductivas mediante deducción natural:

   $$T[\neg \forall x(P(x) \wedge Q(x))] \vdash \exists x \neg P(x) \vee \exists y \neg Q(y)$$

6. Demuestre en Cálculo de Deducción Natural las siguientes estructuras argumentales:

   $$T\ [\ \forall x\ (P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge \neg R(a,x)))\ ,\ \forall x\ \forall y\ (R(y,x) \vee H(x))\ ]\ \vdash\ \forall x\ (P(x) \rightarrow H(x))$$

7. $\exists x\ \exists y\ (\ R(x,y) \vee R(y,x)\ )\ ,\ \neg \exists x\ R(x,x)\ \vdash\ \exists x\ \exists y\ \neg (x = y)$

Demostrar la siguiente deducción con el cálculo de deducción natural, justificando cada paso adecuadamente:

$$T\ [\ \forall x \exists y\ r(x,f(y)) \lor \neg \exists z\ p(z)\ ,\ \exists x \forall z\ (r(x,f(z)) \rightarrow q(z))\ ]\ \vdash\ p(b) \rightarrow \exists x\ q(x)$$

1.	$\forall x \exists y\ r(x,f(y)) \lor \neg \exists z\ p(z)$	premisa	
2.	$\exists x \forall z\ (r(x,f(z)) \rightarrow q(z))$	premisa	
3.	$\quad p(b)$	supuesto	
4.	$\quad \exists z\ q(z)$	int $\exists$ 3	
5.	$\quad \forall x \exists y\ r(x,f(y))$	corte 1,4	
6.	$\quad \forall z\ (r(a,f(z)) \rightarrow q(z))$	elim $\exists$ 2	a constante temporal
7.	$\quad \exists y\ r(a,f(y))$	elim $\forall$ 5	
8.	$\quad r(a,f(b))$	elim $\exists$ 7	b constante temporal
9.	$\quad r(a,f(b)) \rightarrow q(b)$	elim $\forall$ 6	
10.	$\quad q(b)$	modus ponens 8, 9	
11.	$\quad \exists x\ q(x)$	int $\exists$ 10	
12.	$p(b) \rightarrow \exists x\ q(x)$	int $\rightarrow$ 3, 11	

Demostrar la corrección de la siguiente estructura deductiva mediante deducción natural:

$\{\exists x \forall y (P(y) \to Q(x))\} \vdash \exists y P(y) \to \exists x Q(x)$

$\{\exists x \forall y (P(y) \to Q(x))\} \vdash \exists y P(y) \to \exists x Q(x)$

1: $\exists x \forall y (P(y) \to Q(x))$	premisa
2: $\exists y P(y)$	supuesto
3: $P(a^*)$	$E_{\exists 2}$
4: $\forall y (P(y) \to Q(a^*))$	$E_{\forall 1}$
5: $P(a^*) \to Q(a^*)$	$E_{\forall 4}$
6: $Q(a^*)$	$E_{\to 5}$
7: $\exists x Q(x)$	$I_{\exists 6}$
8: $\exists y P(y) \to \exists x Q(x)$	$I_{\to 2,7}$

Demostrar mediante deducción natural la corrección del siguiente argumento (se pueden usar las reglas derivadas):

$$T\ [\ \neg\forall x\ P(x,x)\ ]\ \vdash\ \exists y\ (P(a,y) \rightarrow \forall x\ P(x,x)) \rightarrow \exists y\ \neg P(a,y)$$

1.	$\neg\forall x\ P(x,x)$	premisa
2.	$\vert$ $\exists y\ (P(a,y) \rightarrow \forall x\ P(x,x)$	supuesto
3.	$\vert$ $P(a,b) \rightarrow \forall x\ P(x,x)$	elim $\exists$ 2 ('b' constante nueva)
4.	$\vert$ $\neg P(a,b) \vee \forall x\ P(x,x)$	def $\rightarrow$ 3
5.	$\vert$ $\neg P(a,b)$	corte 1, 4
6.	$\vert$ $\exists y\ \neg P(a,y)$	int $\exists$ 5
7.	$\exists y\ (P(a,y) \rightarrow \forall x\ P(x,x)) \rightarrow \exists y\ \neg P(a,y)$	int $\rightarrow$ 2, 6

Demostrar la fórmula $\exists x\,(q(x) \rightarrow p(f(a),x))$ a partir del conjunto de premisas

$$\{\ \forall x\,(\neg\, q(x) \vee r(x))\ ,\ \ \forall x\, \exists z\,(\neg\, p(x,z) \rightarrow \neg\, r(z))\ \}$$

1.	$\forall x\, \exists z\,(\neg p(x,z) \rightarrow \neg r(z))$	premisa
2.	$\exists z\,(\neg p(f(a),z) \rightarrow \neg r(z))$	elim $\forall$ 1 (*)
3.	$\neg p(f(a),c) \rightarrow \neg r(c)$	elim $\exists$ 2
4.	$\quad q(c)$	supuesto
5.	$\quad \forall x\,(\neg\, q(x) \vee r(x))$	premisa
6.	$\quad \neg\, q(c) \vee r(c)$	elim $\forall$ 5
7.	$\quad r(c)$	corte 4,6
8.	$\quad \neg\neg p(f(a),c)$	modus tollens 3,7
9.	$\quad p(f(a),c)$	elim $\neg$ 8
10.	$q(c) \rightarrow p(f(a),c)$	intr $\rightarrow$ 4,9
11.	$\exists x\,(q(x) \rightarrow p(f(a),x))$	intr $\exists$ 10

(*) puesto que en la fórmula que hay que demostrar aparece $p(f(a),x)$

Demostrar la corrección de la estructura deductiva siguiente, mediante deducción natural:

$$T [\neg \forall x (P(x) \wedge Q(x))] \vdash \exists x \neg P(x) \vee \exists y \neg Q(y)$$

1ª solución:

1.	$\neg \forall x (P(x) \wedge Q(x))$	premisa
2.	$\exists x \neg (P(x) \wedge Q(x))$	$\neg\forall x\, A(x) \equiv \exists x \neg A(x)$
3.	$\exists x (\neg P(x) \vee \neg Q(x))$	De Morgan 2
4.	$\neg P(a) \vee \neg Q(a)$	elim $\exists$ 3, a constante nueva
5.	$\quad \mid \neg P(a)$	supuesto
6.	$\quad \mid \exists x \neg P(x)$	int $\exists$ 5
7.	$\quad \mid \exists x \neg P(x) \vee \exists y \neg Q(y)$	int $\vee$ 6
8.	$\quad \mid \neg Q(a)$	supuesto
9.	$\quad \mid \exists y \neg Q(y)$	int $\exists$ 8
10.	$\quad \mid \exists x \neg P(x) \vee \exists y \neg Q(y)$	int $\vee$ 9
11.	$\exists x \neg P(x) \vee \exists y \neg Q(y)$	elim $\vee$ 4, 5-7, 8-10

2ª solución: por contradicción:

1.	$\neg\forall x (P(x) \wedge Q(x))$	premisa
2.	$\quad \mid \neg(\exists x \neg P(x) \vee \exists y \neg Q(y))$	supuesto
3.	$\quad \mid \neg\exists x \neg P(x) \wedge \neg\exists y \neg Q(y)$	De Morgan 2
4.	$\quad \mid \forall x \neg\neg P(x) \wedge \forall y \neg\neg Q(y)$	$\neg\exists x\, A(x) \equiv \forall x \neg A(x)$
5.	$\quad \mid \forall x\, P(x) \wedge \forall y\, Q(y)$	elim $\neg$ 4, dos veces
6.	$\quad \mid \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$	$\forall y\, Q(y) \equiv \forall x\, Q(x)$
7.	$\quad \mid \forall x (P(x) \wedge Q(x))$	$\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \equiv \forall x (P(x) \wedge Q(x))$
8.	$\quad \mid \neg\forall x (P(x) \wedge Q(x))$	iteración 1
9.	$\neg\neg(\exists x \neg P(x) \vee \exists y \neg Q(y))$	int $\neg$ 2, 7, 8
10.	$\exists x \neg P(x) \vee \exists y \neg Q(y)$	elim $\neg$ 9

Demuestre en Cálculo de Deducción Natural la siguiente estructura argumental:

$T\ [\ \forall x\ (P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge \neg R(a,x)))\ ,\ \forall x\ \forall y\ (R(y,x) \vee H(x))\ ]\ \vdash\ \forall x\ (P(x) \rightarrow H(x))$

1.	$\forall x\ (P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge \neg R(a,x)))$	premisa
2.	$\forall x\ \forall y\ (R(y,x) \vee H(x))$	premisa
3.	$P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge \neg R(a,x))$	elim ∀ 1
4.	$\forall y\ (R(y,x) \vee H(x))$	elim ∀ 2
5.	$R(a,x) \vee H(x)$	elim ∀ 4
6.	│ $P(x)$	supuesto
7.	│ $Q(x) \wedge \neg R(a,x)$	corte 3, 6
8.	│ $\neg R(a,x)$	elim ∧ 7
9.	│ $H(x)$	corte 5, 8
10.	$P(x) \rightarrow H(x)$	int → 6, 9
11.	$\forall x\ (P(x) \rightarrow H(x))$	int ∀ 10

Probar con deducción natural

$$\exists x\, \exists y\, (\, R(x,y) \vee R(y,x)\,)\ ,\ \neg \exists x\, R(x,x) \ \vdash\ \exists x\, \exists y\, \neg (x = y)$$

1 -	$\exists x\, \exists y\, (\, R(x,y) \vee R(y,x)\,)$		premisa	
2 -	$\neg \exists x\, R(x,x)$		premisa	
3 -	$R(a,b) \vee R(b,a)$		elim $\exists$ 1, dos veces	
4 -	$\forall x\, \neg R(x,x)$		$\neg \exists x\, P(x) \equiv \forall x\, \neg P(x)$	
5 -		$a = b$	supuesto	
6 -		$\neg R(a,a)$	elim $\forall$ 4	
7 -		$\neg R(b,a)$	elim = 5,6	(*)
8 -		$R(a,b)$	corte 3,7	
9 -		$\neg R(a,b)$	elim = 5,6	(*)
10 -	$\neg (a = b)$		int $\neg$ 5, 8, 9	
11 -	$\exists y\, \neg (a = y)$		int $\exists$ 10	
12 -	$\exists x\, \exists y\, \neg (x = y)$		int $\exists$ 11	

(*) en los dos casos sólo se ha sustituído una de las dos constantes a’s que aparecen